Fiche méthode : Unités et analyse dimensionnelle

1 Unités du Système International (S.I.)

Le Système International compte sept unités de base :
- le **mètre** (m),
- le **kilogramme** (kg),
- la **seconde** (s),
- l'**ampère** (A),
- le **kelvin** (K),
- la **mole** (mol),
- la **candela** (cd).

Ces unités sont censées quantifier des grandeurs physiques indépendantes.
De ces sept unités sont déduites les unités dérivées du Système International :

Grandeur Physique	***Unité***	***Symbole***	***Expression en unités de base***
Fréquence	hertz	Hz	s^{-1}
Force	newton	N	$kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}$
Pression	pascal	Pa	$kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-2}$
Energie	joule	J	$kg{\cdot}m^{2}{\cdot}s^{-2}$
Puissance	watt	W	$kg{\cdot}m^{2}{\cdot}s^{-3}$
Charge électrique	coulomb	C	$A{\cdot}s$
Tension électrique	volt	V	$kg{\cdot}m^{2}{\cdot}A^{-1}{\cdot}s^{-3}$
Eclairement lumineux	lux	lx	$cd{\cdot}m^{-2}$
Vitesse	mètres par seconde		$m{\cdot}s^{-2}$
Masse volumique	kilogrammes par m^3		$kg{\cdot}m^{-3}$
Etc...			

2 Etude dimensionnelle

En physique, on s'intéresse à des **grandeurs** mesurables, accessibles par l'expérience, qui peuvent s'exprimer dans différentes unités selon la convention choisie. Ainsi, une longueur est une grandeur qui peut s'exprimer en mètres, ou bien en pouces, etc...

Pour ne pas se restreindre à un système d'unité en particulier, on préfère parler des **dimensions** des grandeurs physiques. Par exemple, une vitesse peut s'exprimer en pouces par minutes, ou bien en $m.s^{-1}$, mais on dira qu'elle aura toujours les dimensions d'une longueur divisée par un temps.

L'analyse dimensionnelle est fondamentale en physique, car elle permet notamment :
- d'éviter les erreurs de calculs littéral en vérifiant à la fin l'homogénéité d'une relation ;

— de prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat en isolant certains paramètres clés du système, sans forcément avoir besoin de recourir à une théorie élaborée ni à des calculs compliqués.

2.1 Notion de dimension

La connaissance de la dimension d'une grandeur G renseigne sur sa nature physique. La dimension d'une grandeur **G** se note [**G**]. L'équation qui exprime la dimension de G en fonction des sept dimensions de bases s'appelle **l'équation aux dimensions**.

Exemples :

Si G est une masse, alors [G] = M, elle a la dimension d'une masse ; on dit aussi qu'elle est homogène à une masse. La relation [G] = M correspond à l'équation aux dimensions de la grandeur G. L'équation aux dimensions d'une vitesse s'écrira :

$$[v] = \frac{L}{T} \text{ ou } [v] = L.T^{-1}$$

On dira qu'une vitesse est **homogène** à une longueur divisée par un temps.

— Pour écrire l'équation aux dimensions de la grandeur G, aucun choix de système d'unités n'est imposé.

— Lorsque dans l'écriture de l'équation aux dimensions d'une grandeur G, on obtient [G] = 1, la grandeur est dite sans dimension ou de dimension 1. Dans le cas d'un angle, on obtient 1 donc un angle est sans dimension, mais il y a quand même une unité : le radian.

— Une équation est dite homogène si ses deux membres ont la même dimension. En physique, une équation est forcément homogène (sinon elle est fausse...).

2.2 Règles sur les équations aux dimensions

On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension

— La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs : [AB] = [A][B]

— La dimension de A^n est égale à $[A]^n$ où n est un nombre sans dimension.

— Pour les fonctions : $\sin(u), \cos(u), \tan(u), \ln(u), \log(u)$ et $\exp u$, la grandeur u est sans dimension.

— L'équation aux dimensions de toute grandeur G peut se mettre sous la forme :

$$[G] = L^a M^b T^c I^d J^e \theta^f N^g$$

3 Les dimensions de quelques grandeurs

1. Montrer que $[E] = M.L^2.T^{-2}$. En déduire que $[g] = L.T^{-2}$, et réécrire l'intensité de la pesanteur terrestre avec les unités de ces grandeurs.

2. Donner l'équation aux dimensions d'une accélération a. On rappelle que l'accélération est le taux de variation de la vitesse par unité de temps. Pour quelle raison appelle-t-on parfois g l'accélération de la pesanteur ?

3. Montrer que $[F] = M.L.T^{-2}$. En déduire que $[E] = [F].L$, et que $[F] = M.[a]$.
4. La force pressante F exercée par un fluide à la pression p sur une surface S peut se calculer à partir de la relation $F = p.S$. Montrer que la pression a les dimensions d'une énergie par unité de volume.

4 Vérifier l'homogénéité d'une relation

Lors de l'établissement d'une expression, l'analyse dimensionnelle permet de vérifier son homogénéité et de la corriger le cas échéant, sachant qu'une expression non homogène ne peut être que fausse. Pour obtenir l'équation aux dimensions de chaque grandeur présente dans l'expression, on utilise des relations dites « passerelles » entre les grandeurs mises en jeu. Ces relations sont obtenues à partir de formules établies en cours.

Exemple : vérification de l'homogénéité de l'expression de la période d'un pendule simple :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

avec T est la période du pendule élastique, m la masse du solide au bout du ressort et k l'élasticité du ressort. L'expression est « dimensionnellement » juste si : La dimension du premier terme de l'égalité est $[T]$ = T (un temps). L'équation aux dimensions du second terme peut s'écrire :

$$[\sqrt{m/k}] = [\sqrt{m}]/[\sqrt{k}] = M^{1/2}[k]^{-1/2}$$

Sachant que d'après la seconde loi de Newton $\Sigma F_{ext} = m.a$, si $F_{ext} = k.x$ alors $[k][x] = [m][a]$ soit $[k] = MLT^{-2}L^{-1} = MT^{-2}$. En remplaçant [k] dans l'équation aux dimensions de $[m]^{1/2}[k]^{-1/2}$, on obtient : $M^{1/2}(MT^{-2})^{-1/2} = T$. L'expression de T est homogène car les deux termes de l'équation ont la même dimension, celle d'un temps.

4.1 La pomme de Newton

Au devoir précédent, un élève a trouvé l'expression littérale suivant pour la vitesse de la pomme juste avant de frapper la tête de Newton : $v^2 = \dfrac{2g}{h}$.

1. Montrer par analyse dimensionnelle que ce ne peut pas être le bon résultat.
2. En utilisant l'analyse dimensionnelle, construire une vitesse avec les grandeurs g et h. Calculer l'ordre de grandeur de cette vitesse (on rappelle les données de l'énoncé : $g = 9.8\ N.kg^{-1}$ et $h = 2.6\ m$.
3. La théorie prévoit la relation exacte $v = \sqrt{2gh}$. De quel facteur se trompe-t-on en réalisant l'analyse dimensionnelle ? Pour autant, avons-nous le bon ordre de grandeur ?

4.2 Quelques relations...

Vérifiez l'homogénéité des relations suivantes :

1. La hauteur de chute d'un objet lâché sans vitesse initiale est donnée par $h(t) = \frac{1}{2}gt^2$.
2. La pression dans de l'eau à une distance z de sa surface est $p(z) = p_0 + \rho g z$, où p_0 est la valeur de la pression atmosphérique, ρ est la masse volumique de l'eau, et g l'intensité de la pesanteur.
3. La masse m de solide ionique de masse molaire M à peser pour obtenir une solution de concentration en soluté apporté C et de volume V est donnée par $m = CVM$.
4. La concentration C d'une solution S résultant du mélange de deux solutions S_1 (de concentration C_1 et de volume V_1) et S_2 (de concentration C_2 et de volume V_2) est $C = \dfrac{C_1V_1 + C_2V_2}{V_1 + V_2}$;
5. La position d'une image $\overline{OA'}$ donnée par une lentille convergente (de focale f') d'un objet à distance $\overline{OA}$ du centre optique est $\overline{OA'} = \dfrac{f' \times \overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$.

5 Prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat sans connaitre la théorie

L'analyse dimensionnelle est un outil puissant utilisé quotidiennement dans le monde de la recherche pour isoler les paramètre pertinents d'un système, et prévoir comment un phénomène peut dépendre de ces grandeurs. C'est toujours le point de départ de la réflexion théorique sur un phénomène donné.

Pour saisir l'importance de cette analyse préliminaire, John Wheeler (un physicien américain qui a notamment introduit le terme de trou noir) disait :

"Ne jamais faire de calculs avant d'en connaître le résultat."

Ce qui signifie "ne pas se lancer dans des calculs compliqués sans avoir idée de la forme générale du résultat". Pour reprendre notre exemple précédent de la vitesse de la pomme, il est par exemple bon de savoir à l'avance que le résultat doit nécessairement être proportionnel à $\sqrt{gh}$. Essayons de mettre en oeuvre ce raisonnement sur quelques exemples.

5.1 La période d'un pendule

Imaginons un pendule, c'est à dire une petite masse m suspendue à un fil de longueur l. Si on écarte le pendule de la position verticale, il va osciller périodiquement sous l'effet de son poids. La durée caractéristique de ce phénomène est sa période T, c'est à dire le temps pour que le phénomène se reproduise identiquement à lui-même. Les paramètres physiques importants pour la description du phénomène seront la longueur l, la masse m et l'intensité de la pesanteur g. On imagine mal en effet que la période du pendule puisse dépendre fortement de la température de la pièce, ou de son taux d'humidité. Le rôle d'une théorie physique sera de donner la relation complète entre la période T et les paramètres pertinents retenus. Mais sans théorie, on peut quand même prévoir par analyse dimensionnelle la dépendance de T vis à vis de ces paramètres.

1. En utilisant l'analyse dimensionnelle, construire à partir des grandeurs pertinentes retenues une grandeur dont la dimension sera celle d'un temps au carré.
2. En déduire que la période T sera forcément de la forme $T = k\sqrt{\frac{l}{g}}$, où k est une constante numérique sans unité, dont la valeur sera à déterminer par la théorie complète.
3. Commenter cette relation.

5.2 Vitesse de libération

La vitesse de libération est la vitesse à communiquer à un objet de masse m à la surface d'une planète pour le libérer complètement son influence gravitationnelle.

1. De quels paramètres physiques peut bien dépendre cette vitesse de libération ?
2. A partir de la loi de Newton sur la gravitation universelle, donner les dimensions de la constante de gravitation G.
3. Construire une grandeur qui ait les dimensions du carré d'une vitesse à partir des grandeurs susceptibles d'influencer la vitesse de libération.