MP n°14 : Fluides

Bibliographie :

- *Optique expérimentale*, Sextant
- *Expériences de physique* : Capes de sciences physiques, Duffait, Bréal
- *Expériences de physique* : optique, mécanique, fluides, acoustique, Bellier, Dunod
- *Montages de physique* : optique, mécanique, statique des fluides, calorimétrie, Bellier, Bouloy, Guéant, Dunod
- *Optique* : une approche expérimentale, Houard, De Boeck
- *Les montages à l'agrégation interne de sciences physiques*, Dumont, Ellipses
- *Physique expérimentale* : Optique, mécanique des fluides, ondes et themodynamique, Fruchart, Lidon, Thibierge, Champion, Le Diffon, De Boeck

Introduction

Un fluide est un système composé de nombreuses particules libres de se mouvoir les unes par rapport aux autres. Le fluide peut se présenter sous deux aspects : l'état liquide et l'état gazeux. Le fluide peut se déformer sous l'action de faibles forces : il ne possède pas de forme propre. Le liquide possède un volume propre limité par une surface libre (la compressibilité des liquides est très faible) tandis que le gaz occupe tout le volume qui lui est offert.

Lorsqu'un fluide est en mouvement, les couches de fluides ne glissent pas parfaitement les unes sur les autres : il existe des forces de frottement. Ce phénomène est décrit à l'aide de la notion de viscosité. Un fluide parfait est un fluide où tous les phénomènes de diffusion, et en particulier la viscosité, sont négligeables.

Un fluide au repos est donc parfait.

L'étude du fluide peut se diviser en quatre parties :

— La statique des fluides où la relation fondamentale est :

$$\overrightarrow{\nabla} p = \rho \overrightarrow{f}$$

— Les phénomènes de surface dus à la tension superficielle.

— La dynamique des fluides parfaits où $\eta = 0$; ils sont décrits par l'équation d'Euler :

$$\rho \left[\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{v} \right] = -\overrightarrow{\nabla} p + \overrightarrow{f}$$

— La dynamique des fluides réels, ils sont décrits par l'équation (non linéaire) de Navier-Stokes :

$$\rho \left[\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla} \right) \overrightarrow{v} \right] = -\overrightarrow{\nabla} p + \overrightarrow{f} + \eta \Delta \overrightarrow{v}$$

1 Statique des fluides

1.1. Poussée d'Archimède

"*Tout corps immergé partiellement ou totalement dans un fluide subit de la part de celui-ci une poussée verticale, dirigée vers le haut, appelée poussée d'Archimède, dont l'intensité est égale au poids du fluide déplacé. Le point d'application de cette force est le centre de poussée ; il est différent, en général, du centre de gravité.*"

Soit un corps de masse volumique ρ et de volume V plongé dans un fluide de masse volumique ρ_f. La poussée d'Archimède que le fluide exerce sur ce corps est la force

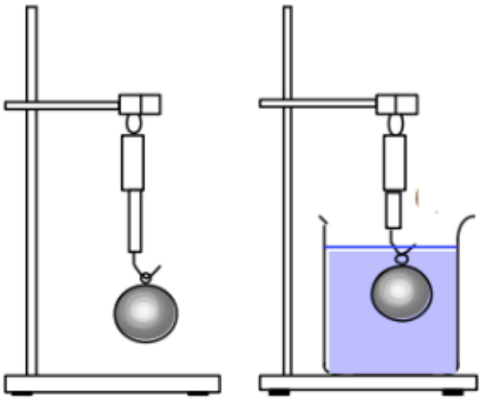
$$\overrightarrow{\Pi} = -\rho_f V \overrightarrow{g}$$

Le poids apparent de ce corps dans le fluide est la somme de son poids et de la poussée d'Archimède, soit

$$\overrightarrow{\Pi}_{app} = (\rho - \rho_f) V \overrightarrow{g}$$

1.1.1. Modèle

Dans cette partie, on mesure la poussée d'Archiméde par différentes méthodes. Pour cela, nous considérons le dispositif expérimental constitué d'une masse pendue à une potence, reliée à un dynamomètre et plongée dans une cuve. La cuve est remplie partiellement d'eau et est posée sur une balance.



Dynamomètre

Lorsque le cylindre est à l'air libre et ne repose pas sur l'eau, le poids du cylindre (de masse m) est compensé par la tension $\vec{T}_0$ du dynamomètre : $\vec{T}_0 + m\vec{g} = \vec{0}$. Lorsque le cylindre est enfoncé 1 dans l'eau, la poussée d'Archiméde $\vec{\Pi}$ s'applique sur le cylindre, ce qui modifie la tension $\vec{T}$ du dynamomètre.
On peut écrire le bilan des forces s'appliquant sur le cylindre à l'équilibre :
En remplaçant $m\vec{g}$ par $-\vec{T}_0$ dans cette expression, on déduit la poussée d'Archimède, mesurée par le dynamomètre :

$$\vec{\Pi} = \vec{T}_0 - \vec{T}$$

Balance

On peut également mesurer la poussée d'Archimède avec la balance. L'eau exerçant une poussée sur le cylindre $\vec{\Pi}$, par le principe de l'action et de la réaction, le cylindre exerce une force $-\vec{\Pi}$ sur l'eau, force dirigée vers le bas et dont la valeur est égale à la poussée d'Archimède. En plus de cette force, la masse d'eau M_0 contenue dans le récipient subit la force de pesanteur $M_0\vec{g}$ (son poids) et la réaction $\vec{R}$ du plateau de la balance. On peut donc écrire le bilan des forces s'appliquant à l'équilibre sur l'eau : $M_0\vec{g} - \vec{\Pi} + \vec{R} = \vec{0}$, d'ou' on déduit la poussée d'Archimède :

$$\vec{\Pi} = M_0\vec{g} + \vec{R}$$

La balance mesure la force que subit son plateau. Si on définit M comme la lecture de la balance, on a donc :

$$\vec{R} = -M\vec{g}$$

Le poids de l'eau $M_0\vec{g}$ peut être mesuré par la balance lorsque le cylindre ne repose pas sur l'eau.
On déduit donc : $\vec{\Pi} = (M_0 - M)\vec{g}$, d'où :

$$\Pi = |M_0 - M|g$$

Volume d'eau déplacé

La poussée d'Archimède est égale au poids du volume d'eau déplacé. Le volume immergé V_i du cylindre plus le volume de l'eau V_0 est mesuré par le produit hS où h est la hauteur d'eau dans le récipient et S la section du récipient : $V_i + V_0 = hS$. Mais le volume d'eau V_0 peut être obtenu grâce à la hauteur d'eau h_0 dans le récipient lorsque le cylindre n'est pas en contact avec l'eau : $V_0 = h_0S$. On tire le volume immergé : $V_i = (h - h_0)S$. En notant ρ la masse volumique de l'eau, le poids du volume d'eau déplacé vaut donc :

$$\vec{P}_i = (h - h_0)S\rho\vec{g}$$

1.1.2. Expériences

1. Alors que le cylindre n'est pas encore en contact avec l'eau, noter la hauteur d'eau dans le récipient h_0, la valeur de la force $\overrightarrow{T}_0$ lue sur le dynamomètre et tarer la balance de façon à ce que son affichage donne directement $M - M_0$.
2. Changer la hauteur de la potence de manière à plonger le cylindre de plus en plus profondément dans l'eau. Pour chaque position, noter la hauteur d'eau dans la cuve h, la valeur de la force T lue sur le dynamomètre et la valeur $M - M_0$ lue sur la balance. La position d'enfoncement maximale correspond au moment où l'eau effleure la surface supérieure de l'objet.
3. La poussée d'Archimède est-elle égale au poids du volume d'eau déplacé ? Pour répondre à cette question, tracer la poussée d'Archiméde mesurer précédemment en fonction de la variation de la hauteur d'eau $h - h_0$. Quel devrait être le coefficient directeur de la droite de régression ?

1.2. Mesure de densité à l'aide d'un tube en U

On considère un tube en U dont l'une des branches est remplie d'huile de masse volumique huile et l'autre d'eau ρ_{eau}. En mesurant la hauteur de liquide dans chacune des branches, et en se servant le la relation fondamentale de l'hydrostatique ($\Delta P = \rho g z$), on cherche la masse volumique de l'huile utilisée.

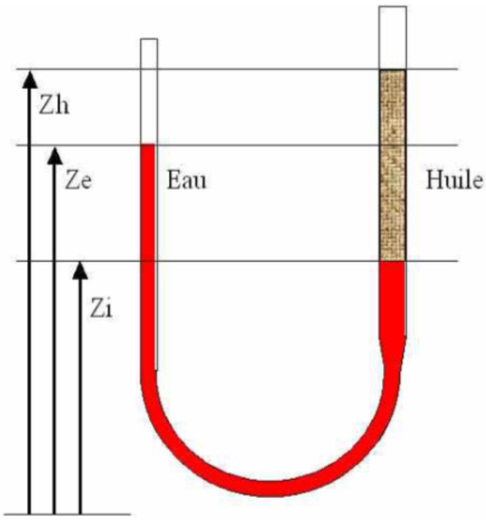
1.2.1. Calculs préliminaires

On note Z_e la hauteur de la surface de l'eau, Z_h la hauteur de la surface de l'huile, $Z_i$la hauteur de l'interface entre l'eau et l'huile par rapport à un plan de référence. P_0 est la pression atmosphérique au-dessus de l'eau et de l'huile. P_i est la pression à l'interface entre l'eau et l'huile. On note enfin ρ_{huile} la masse volumique de l'huile et ρ_{eau} celle de l'eau.
En appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique à la colonne d'eau, puis à la colonne d'huile, on trouve que la différence de pression $P = P_i - P_0$ est donnée par l'équation suivante :

$$\Delta P = \rho_{eau} g (Z_e - Z_i) = \rho_{huile} g (Z_h - Z_i)$$

1.2.2. Expériences

Remplissez d'eau le tube en U par sa branche la plus fine jusqu'à une hauteur de 40 cm. Notez le valeur de Z_e la hauteur de la surface de l'eau. Vous ajouterez ensuite de l'huile petit à petit par la branche la plus large du tube en U. Attendez quelques secondes que l'huile soit drainée des parois avant de faire votre mesure. Vous relèverez alors Z_e, Z_h et Z_i.



Si l'interface entre l'eau et l'huile est proche du bas du tube et que l'huile risque de rentrer dans le tuyau souple lors de votre prochaine mesure, ajoutez de l'eau à la place. Vous reprendrez ensuite les ajouts d'huile. Vous devez faire une dizaine de mesure, de façon à ce que toute la hauteur du tube soit exploitée. Il vous faudra donc ajuster les quantités d'huile pour ce faire.
1. Tracer $Z_e - Z_i$ en fonction de $Z_h - Z_i$. Inclure les barres d'erreur.
2. Déterminer la masse volumique de l'huile utilisée, en effectuant une régression linéaire sur vos données. Déterminer l'incertitude associée à cette mesure.
3. Comparer cette valeur à une mesure directe de la masse volumique à l'aide d'une pipette graduée et d'une balance. Discuter la précision de ces deux mesures.

1.3. Pression statique au sein d'un fluide

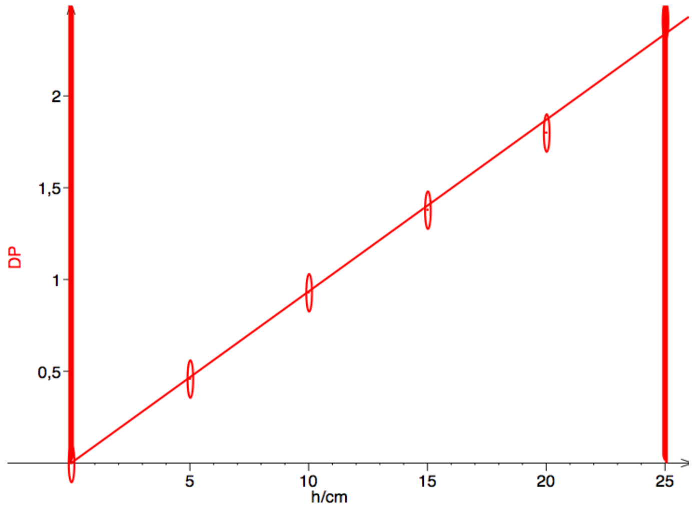
Le capteur de pression est raccordé à un tuyau flexible. Le tuyau flexible est raccordé à un tube en verre (on peut graduer le tube en cm) Cet ensemble est notre système de mesure.
On remplit une éprouvette avec de l'eau. On descend progressivement le tube en verre dans l'éprouvette et on note la valeur de la pression ainsi que la profondeur du tube (on peut utiliser les graduations sur le tube)
Attention on ne peut pas utiliser les graduations sur l'éprouvette car le niveau change en fonction de la profondeur du tube

Profondeur h (cm)	0	5	10	15	20	25
Pression P (kPa)	101,37	101,83	102,3	102,75	103,17	103,78

D'après le principe fondamental de l'hydrostatique,

$$\Delta P = P - P_0 = \rho g h$$

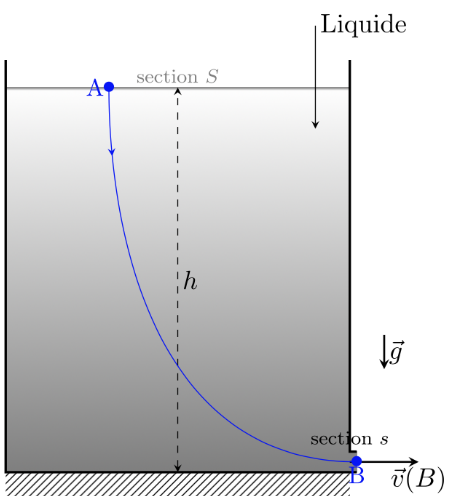
Coefficient directeur $= a = (93,5 \pm 6,9) \times 10^{-3}$ kPa.cm^{-1} $= 9,35 \times 10^3$ Pa.m^{-1}
La valeur attendue est $\rho \times g = 9,8 \times 10^3$ Pa.m^{-1}



2 Dynamique des fluides

2.1. Vidange

Considérons un réservoir cylindrique rempli d'un liquide dans lequel on perce un orifice. La formule de Torricelli relie le débit d'écoulement avec la hauteur de liquide h. On fera les hypothèses suivantes :



— La section S du cylindre est très grande devant la section de l'orifice : $s \ll S$;
— On considère le liquide incompressible et parfait ;
— Enfin, on considère que l'écoulement est en régime stationnaire.

On cherche à calculer la vitesse d'écoulement v à la sortie du trou. L'application du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant donne

$$p_{\text{atm}} + \mu g h + \frac{1}{2}\mu v^2(\mathrm{A}, t) = p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\mu v^2(\mathrm{B}, t)$$

Or, la conservation de la masse donne $v(\mathrm{A}, t)\, S = v(\mathrm{B}, t)\, s$ d'où $v(\mathrm{A}, t) \ll v(\mathrm{B}, t)$ car $s \ll S$. Finalement

$$v(\mathrm{B}, t) = \sqrt{2gh(t)}$$

On remarquera que la vitesse a la même expression que celle de la chute libre d'un point matériel dans le champ de pesanteur. Le débit volumique d'écoulement vaut donc

$$Q_V = s\, v = s\sqrt{2gh(t)}$$

Pour connaître l ?évolution de la hauteur d'eau, il faut relier v à $h(t)$:

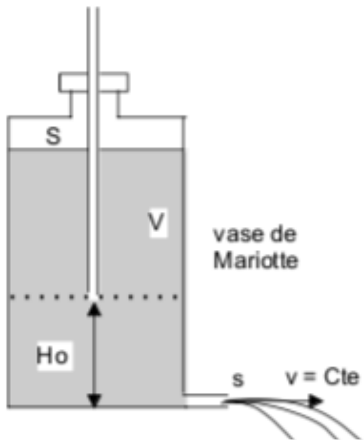
$$v(\mathrm{A}, t) = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{Q_v}{S} = \frac{s}{S}\sqrt{2gh}$$

L'intégration de cette équation donne un temps de vidange

$$\tau = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \text{avec} \quad h_0 = h(t = 0)$$

Remarque :
En pratique, le jet de sortie est contractée. La section effective de sortie est donc plus petite que la section de l'orifice. Si l'on veut tenir compte de ce phénomène il faut remplacer s par αs où α est le coefficient de contraction.

2.1.1. Expérience



On a vu d'après le théorème de Bernoulli,

$$v = \sqrt{\frac{2gH_0}{1 - \frac{s^2}{S^2}}} \simeq \sqrt{2gH_0} = \text{constante}$$

On mesure au préalable le volume V et la durée Δt de son écoulement.
On en déduit le débit $Q = \frac{V}{\Delta t} = s \times v$
D'où $v = \frac{V}{s\Delta t}$
Exemples de mesure : V = 330 mL, Δt = 35 s, S =8×10^{-3} m^2, s = 2,8 ×10^{-5} m^2, H_0 = 5 cm

2.2. Loi de Poiseuille

2.2.1. Modèle

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux dans un long tube cylindrique de rayon R et de longueur $L \gg R$. Le tube est horizontal (orienté suivant Oz) et l'écoulement est assuré grâce à l'existence d'une différence de pression Δp entre l'entrée du tube et la sortie du tube.

Hypothèses de travail

— L'écoulement est permanent donc $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$.
— L'écoulement est incompressible, par conséquent $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$.
— Le nombre de Reynolds est suffisamment petit pour supposer un régime d'écoulement laminaire.
— L'écoulement est parallèle à Oz et invariant par rotation autour de l'axe Oz, d'où $\vec{v} = v(r,z)\vec{u}_z$.
— Enfin, on néglige la pesanteur car $\mu g R \ll \Delta p$.

Calcul du champ de vitesse

Commençons par écrire l'équation de continuité :

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial(rv_r)}{r\partial r} + \frac{\partial(v_\theta)}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = v(r)\vec{u_z}$$

La vitesse ne dépend pas de z. Calculons l'accélération :

$$\vec{a}(\mathrm{M},t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} v_z(r)\vec{u_z} = \vec{0}$$

L'accélération est nulle. En effet, les lignes de champ sont des droites horizontales et se confondent avec la trajectoire des particules (régime stationnaire). Or si la vitesse ne dépend pas de z cela signifie que les particules de fluide se déplacent avec une vitesse constante en direction et en intensité. L'accélération est donc nulle. On peut aussi ajouter que chaque particule de fluide est soumise à deux forces qui se compensent : les forces de pression et les forces de viscosité. Sans force de pression, c'est-à-dire sans différence de pression il ne peut pas avoir d'écoulement stationnaire

L'équation de Navier-Stokes se réduit donc à l'équation de Stokes : $\vec{\nabla} p = \eta \triangle \vec{v}$. Projetons cette relation dans la base cylindrique :

$$\left|\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial p}{\partial r} & = & 0 \\ \dfrac{\partial p}{r\partial\theta} & = & 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} & = & \eta \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \eta \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

Ainsi, la pression ne dépend que de z. Le terme de gauche de la dernière équation ne dépend donc que de z alors que celui de droite ne dépend que de r. Cette équation apparemment paradoxale se résout si les deux termes sont constants.

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = K = -\frac{\Delta p}{L} = \eta \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

où $\Delta p = p_1 - p_2$ est la différence de pression entre l'entrée et la sortie.
En intégrant deux fois on obtient

$$v(r) = -\frac{\Delta p}{4\eta L} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration. La vitesse doit être définie en $r = 0$ ce qui implique $C_1 = 0$. Enfin, les conditions aux limites imposent $v(R) = 0$ d'où

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)$$

Le profil des vitesses est parabolique.

Calcul du débit volumique

Le débit volumique est le flux du vecteur vitesse à travers une section de la canalisation :

$$Q_V = \iint \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_0^R v(r)\,2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\Delta p}{L}$$

Ainsi, la différence de pression est directement reliée au débit volumique par la formule

Formule de Poiseuille

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{\pi R^4} Q_V$$

2.2.2. Notion de perte de charge

Définition
La perte de charge est la pression supplémentaire qu'il faut imposer entre les extrémités d'une canalisation pour assurer un écoulement stationnaire et compenser le frottement visqueux. Deux termes entrent dans le calcul des pertes de charge :
La perte de charge en ligne dite perte de charge régulière est due aux frottements le long du trajet.
La perte de charge singulière est due à la présence d'obstacles localisés tels que les coudes, les robinets, les vannes, les modifications brutales de section etc.
La perte de charge sera notée Δp_η et s'exprime en Pa.
Essayons de donner une forme générale à l'expression de la perte de charge dans une canalisation à l'aide d'une analyse dimensionnelle. Pour cela, utilisons le théorème π
Théorème π
Le théorème π ou théorème de Vashy-Buckingham est le théorème fondamental de l'analyse dimensionnelle. Supposons que nous cherchions une relation entre n grandeurs physiques $g_{i=1..n}$ que l'on considère pertinentes pour décrire un phénomène. Notons k le nombre de dimensions fondamentales utilisées par ces grandeurs ($k \leq 7$).
Il existe alors $(n-k)$ produits sans dimension notées π_i tels que $f(\pi_1, ..., \pi_{n-k}) = 0$
Considérons une conduite de longueur L, de diamètre D traversée par un fluide de viscosité η et de masse volumique μ circulant à la vitesse moyenne $\overline{v}$. Supposons qu'il existe une relation entre Δp_η, L, D, μ, η et $\overline{v}$.
On a $n = 6$ grandeurs et $k = 3$ dimensions différentes. D'après le théorème π, il existe trois nombres sans dimensions π_1, π_2 et π_3 tels que $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$. Fabriquons donc trois nombres indépendants sans dimension :
L et D étant de même dimension, leur rapport est adimensionné : $\pi_1 = \dfrac{L}{D}$.
Le théorème de Bernoulli nous enseigne que $\frac{1}{2}\mu\bar{v}^2$ est homogène à une pression. Ainsi $\pi_2 = \dfrac{\Delta p_\eta}{1/2\mu\bar{v}^2}$.
Enfin, on sait que le nombre de Reynolds est sans dimension ; ce sera $\pi_3 = \mathcal{R}e = \dfrac{\mu\bar{v}D}{\eta}$
Ces trois nombres sont liés par une loi.

$$\pi_2 = \frac{\Delta p_\eta}{\frac{1}{2}\mu\bar{v}^2} = f(\pi_1, \mathcal{R}e)$$

Par ailleurs, l'expérience montre que la perte de charge régulière Δp_η est proportionnelle à L. Autrement dit, $f(\pi_1, \mathcal{R}e) = \pi_1\lambda(\mathcal{R}e)$ d'où
Équation de Darcy-Weisbach

$$\Delta p_\eta = \lambda(\mathcal{R}e)\frac{1}{2}\mu\bar{v}^2\frac{L}{D} \tag{1}$$

Cette relation est appelée équation de Darcy-Weisbach. Le facteur adimensionné λ désigne le coefficient de perte de charge régulière et ne dépend que du nombre de Reynolds pour une canalisation lisse. Dans le cas d'une canalisation rugueuse, un quatrième nombre sans dimension intervient : la rugosité relative ϵ/D qui mesure le rapport de la hauteur moyenne des aspérités de la paroi interne de la conduite sur son diamètre interne. La valeur de λ peut être obtenue à l'aide d'abaque comme le diagramme de Moody.
Les pertes de charge en régime laminaire
On remarque sur le diagramme de Moody que pour $\mathcal{R} < 2000$, le coefficient de perte de charge suit une loi de puissance (ce qui donne une droite avec une échelle logarithmique). En effet, en régime laminaire, la perte de charge est donnée par la formule de Poiseuille

$$\Delta p_\eta = Q_V\frac{8\eta L}{\pi R^4} = \bar{v}\pi R^2\frac{8\eta L}{\pi R^4} = 32\eta\bar{v}\frac{L}{D^2}$$

Or le nombre de Reynolds de cet écoulement laminaire s'écrit

$$\mathcal{R}e = \frac{\mu\bar{v}D}{\eta} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\mu\bar{v}D}{\mathcal{R}e}$$

Finalement, en régime laminaire

$$\Delta p_\eta = \lambda\frac{1}{2}\mu\bar{v}^2\frac{L}{D} \quad \text{avec} \quad \lambda = \left(\frac{64}{\mathcal{R}e}\right) \tag{2}$$

Les pertes de charge en régime turbulent
En régime turbulent, λ augmente brutalement et pour les grands nombres de Reynolds, le coefficient de perte de charge conserve une valeur constante qui ne dépend que de la rugosité relative de la conduite. Dans ce cas, les pertes de charge varient comme le carré du débit. En conclusion, pour diminuer l'ensemble des pertes de charge dans une canalisation, afin de diminuer les coûts de fonctionnement dus aux pompes, il faut, quand c'est possible :
- diminuer la longueur de canalisation ;
- diminuer le nombre d'accidents sur la canalisation ;

— diminuer le débit de circulation ;
— augmenter le diamètre des canalisations ;
— faire circuler des liquides le moins visqueux possible ;
— utiliser des matériaux de faible rugosité.

Pertes de charges singulières

De la même manière, on peut exprimer les pertes de charge singulières comme suit :

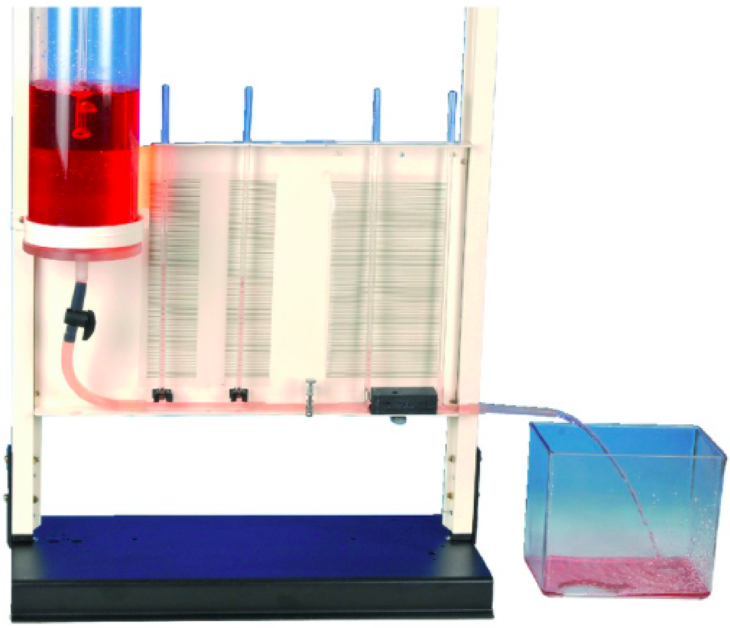
$$\Delta P_s = \xi \frac{1}{2} \mu v_{\text{inc}}^2$$

où ξ est le coefficient de perte de charge singulière et v_{inc} est la vitesse moyenne incidente du fluide arrivant sur l'obstacle. Il existe également des tables donnant ξ en fonction du type d'obstacle.

Remarque :

Dans l'expression du nombre de Reynolds pour une conduite non circulaire, il est d'usage d'utiliser le diamètre hydraulique $D_H = \frac{4\times\text{aire}}{\text{périmètre}}$.

2.2.3. Expérience



Mesure de débit volumétrique et massique en fonction du temps :

- Calculer le débit volumique en utilisant cette relation : $Q_v = V/t$ Q_v en m^3/s ; V en m^3 ; t en s.

Application : On utilise 1,8 L d'eau. Temps d'écoulement : 2min 15s

Calcul du débit volumique : $Q_v = 1{,}8.10^{-3}/135 = 1{,}5.10^{-5}$ m^3/s

- Calculer le débit massique en utilisant cette relation : $Q_M = Q_V \times \rho$

Q_M en kg /s ; Q_v en m^3/s ; ρ en kg/m^3

Application : On sait que la masse volumique du liquide est de $\rho = 1000$ kg/m^3

Calcul du débit massique : $Q_m = 1{,}8.10^{-3} \times 1000 = 1{,}5.10^{-2}$ kg/s

Mesure de pertes de charge :

Les deux configurations décrites ci-dessous permettent la comparaison entre une perte de charge statique et singulière sur un système de même longueur. Grâce au tube creux inséré dans le vase, le débit est constant.

Mesure de la viscosité du liquide :

On se propose de déterminer la viscosité de l'eau du robinet. Procédez comme suit.

- Obturez le tube horizontal et remplissez le récipient jusqu'à environ 25 cm.
- Ouvrez l'extrémité du tube horizontal puis déclenchez le chronomètre à l'instant où $h = 20$ cm. Enregistrer les instants correspondants aux hauteurs $h = 18$ cm, 16 cm, 14 cm, 12 cm et 10 cm.
- En portant $\ln h(t)$ en fonction de l'instant t, montrez la validité de la loi de Poiseuille puis calculer la viscosité η de l'eau sachant que $L = 1$ m, $D = 6{,}1$ cm et $d = 4$ mm.

2.3. Chute libre dans un fluide visqueux

2.3.1. Modèle

La viscosité d'un fluide est une grandeur physique qui caractérise sa résistance à l'écoulement. Elle se mesure en Pa.s (pascal.seconde), se note η et dépend fortement de la température pour les liquides.
Georges Stokes s'est intéressé à la force de frottement qu'un écoulement visqueux produit autour d'une sphère. Il s'est placé dans le cas où l'écoulement est gouverné par la viscosité. Stokes obtient qu'une sphère de rayon r, immobile, plongée dans un liquide visqueux en écoulement permanent, ressent une force de frottement, dite force de traînée

$$\overrightarrow{F} = -6\pi\mu r\overrightarrow{v}$$

où $\overrightarrow{v}$ représente la vitesse de l'écoulement par rapport à la sphère et loin de la sphère.
Cette loi est vérifiée à condition que le régime d'écoulement soit gouverné par la viscosité. Il existe un nombre qui permet de mesurer le caractère plus ou moins visqueux de l'écoulement : le nombre de Reynolds R_e :

$$R_e = \frac{\rho v L}{\eta}$$

où ρ est la masse volumique du fluide, v la vitesse d'écoulement et d le diamètre de la bille. la formule de Stokes n'est valable que si $R_e < 0,3$, quand on souhaite une précision meilleure que 1%.
Considérons le problème de la chute d'une bille dans un fluide au repos dans le référentiel du laboratoire. Effectuons le bilan des forces s'exerçant sur la bille.
- Le poids : $4/3\pi r^3\rho_b g$ où ρ_b est la masse volumique de la bille.
- La poussée d'Archimède : $4/3\pi r^3\rho g$.
- La force de frottement visqueux : $6\pi r v$ où v est la vitesse de la bille. Attention cette force est opposée au vecteur vitesse.

Dans le référentiel d'étude, considéré galiléen, la seconde loi de Newton donne

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_b\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho_b - \rho\right)g - 6\pi\eta r v$$

Si la vitesse initiale est nulle, cette équation différentielle conduit à la solution

$$v = \frac{2g(\rho_b - \rho)}{9\eta}r^2\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

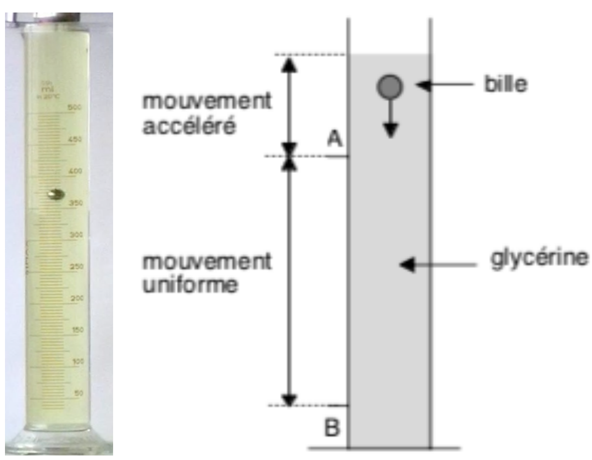
Lorsque $t > 3\tau$, le terme exponentiel est négligeable devant 1 et la vitesse devient

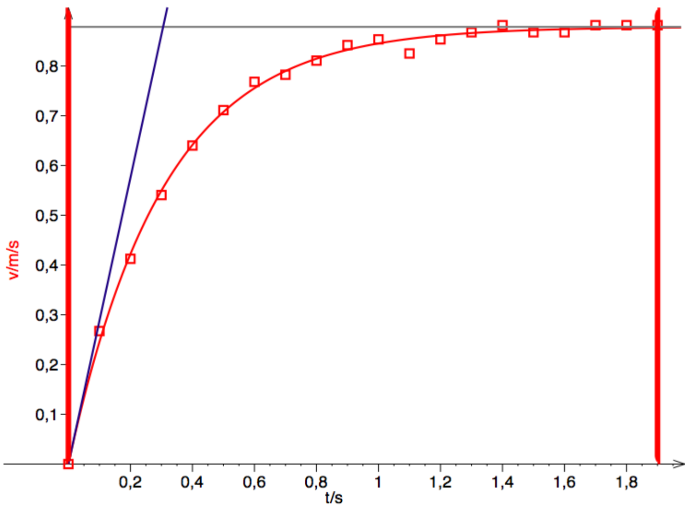
$$\eta = \frac{2}{9}gr^2\frac{\left(\rho_{bille} - \rho_{fluide}\right)}{v_{lim}}$$

Cette vitesse limite permet ainsi de remonter à la viscosité du fluide.

2.3.2. Expérience

La viscosité d'un fluide est la propriété qui exprime sa résistance à une force tangentielle. Elle est due principalement à l'interaction entre les molécules du fluide. Sa détermination se fait en mesurant la valeur de la vitesse limite atteinte par une bille tombant en chute libre dans un récipient contenant un liquide. La viscosité d'un fluide η appelée viscosité absolue (ou dynamique) dépend de la température et s'exprime en Pa.s (Pascal.seconde).
L'expérience consiste à faire tomber des billes d'acier dans un tube rempli de glycérol et à mesurer la vitesse limite.





On lâche une bille de rayon r sans vitesse initiale dans un liquide contenue dans un cylindre de rayon R ($r << R$). Au début de sa chute la bille est accélérée. Nous supposerons que sa vitesse v sera constante quand elle aura traversé la distance jusqu'à une première marque A. Entre A et B sa vitesse est constante.
Les conditions opératoires sont choisies afin de conserver un nombre de Reynolds inférieur à 1. Nous pouvons alors faire le bilan des forces appliquées à la bille, et nous constatons qu'en régime stationnaire, cette bille va voyager à vitesse constante.
Le logiciel Latis Pro permet de numériser cette séquence vidéo. L'enregistrement a été réalisé à l'aide d'une webcam à raison de 10 images/seconde ; il caractérise la chute d'un objet solide de masse m = 24,5 g et de volume V = 18,9 mL dans une éprouvette remplie d'eau.
- Sélection de l'origine : choisir la dernière position de l'objet (altitude la plus basse)
- Sélection de l'étalon : la règle jaune mesure 1,00 m
- Sélection manuelle des points (vous choisirez un point du flotteur facile à repérer) ; vous pourrez alors fermer le module avi de Latis et travailler sur les variables crées automatiquement, « Mouvement X » et « Mouvement Y ».
- Calculer dans le tableur les valeurs de la vitesse expérimentale v_{lim}. Cette grandeur est positive. A partir du graphe, définir et déterminer la vitesse limite vlim ainsi que la durée caractéristique τ de la chute.
Une fois cette vitesse constante mesurée, nous pouvons en déduire la viscosité du fluide :

$$v_{lim} = (0,93 \pm 0,2) \text{ m.s}^{-1}$$

$$\eta = \frac{2}{9} g r^2 \frac{(\rho_{bille} - \rho_{fluide})}{v_{lim}}$$

Pour des récipients de taille finie (de forme cylindrique de rayon R) il faut corriger la formule.
Facteur de correction : $\lambda = \frac{64}{R_e}\left(1 + 2,1\frac{r}{R}\right)$
La comparaison de la viscosité dynamique du glycérol calculée et tabulée doit être effectuée à des températures identiques. En effet, la viscosité du glycérol varie très fortement aux alentours de 20°C, il est donc important de faire une mesure précise de la température.
Ordres de grandeur :
ρ = 1574 kg.m^{-3} , ρ_0 = 1260 kg.m^{-3}, r = 6 $\times 10^{-3}$ m
$\eta = 1,5$ à 1,8 ($\pm 0,2$) Pa.s à 20 °C
on doit préciser la température car on sait que η diminue si T augmente.
Remarques :
- On vérifie que $R_e < 1$: $R = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{1260 \times 1{,}5 \times 10^{-2} \times 1{,}2 \times 10^{-2}}{1{,}5}$ = 0,15 donc <1 on est bien dans les conditions du fluide visqueux.
- Si on remplaçait la glycérine par de l'eau, on obtiendrait $R_e >> 1$ (non visqueux).
Conclusion