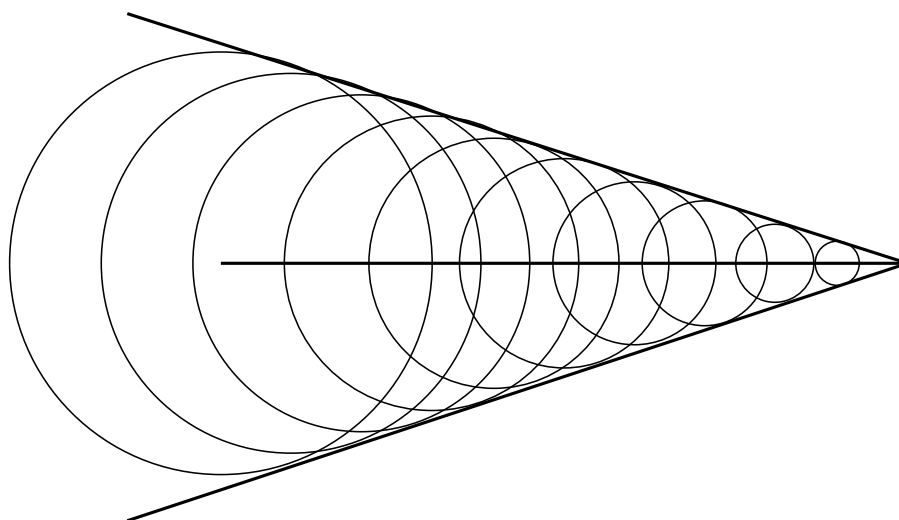


*S3 MI  
Phys272*

*Université Paris-Sud 11  
Orsay*

# *ONDES*

*Cordes vibrantes, ondes sonores,  
ondes optiques*



*2011-2012*

*H. Sazdjian*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Propagation des ondes</b>	<b>1</b>
1.1	Nature des ondes . . . . .	1
1.2	Phénomène de propagation . . . . .	2
1.3	Propriété fondamentale . . . . .	3
1.4	Surfaces d'onde . . . . .	7
1.5	Ondes planes sinusoïdales . . . . .	9
1.6	Représentation complexe . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Cordes vibrantes</b>	<b>13</b>
2.1	Introduction . . . . .	13
2.2	Équation des cordes vibrantes . . . . .	14
2.3	Conditions de raccordement . . . . .	18
2.4	Résolution de l'équation du mouvement . . . . .	21
2.5	Conditions initiales . . . . .	24
2.6	Réflexion . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Ondes stationnaires</b>	<b>35</b>
3.1	Introduction . . . . .	35
3.2	Ondes stationnaires . . . . .	35
3.3	Base complète . . . . .	45
3.4	Exemples . . . . .	49
3.4.1	Exemple 1 . . . . .	49
3.4.2	Exemple 2 . . . . .	50
3.4.3	Exemple 3 . . . . .	52
3.5	Équivalence . . . . .	58

<b>4 Ondes sonores</b>	<b>63</b>
4.1 Introduction . . . . .	63
4.2 Thermodynamique . . . . .	64
4.3 Équation du mouvement . . . . .	70
4.4 Conditions aux limites . . . . .	76
4.5 Ondes stationnaires . . . . .	82
4.6 Puissance transportée . . . . .	84
4.7 Niveau sonore . . . . .	89
4.8 Réflexion et transmission . . . . .	90
4.9 Effet Doppler . . . . .	97
<b>5 Ondes optiques</b>	<b>107</b>
5.1 Ondes électromagnétiques . . . . .	107
5.2 Ondes tridimensionnelles . . . . .	109
5.3 Ondes sphériques . . . . .	112
5.4 Théorème de Malus . . . . .	116
5.5 Milieux diélectriques . . . . .	120
5.6 Chemin optique . . . . .	123
5.7 Approximation de l'optique géométrique . . . . .	125
5.8 Principe de Fermat . . . . .	128
5.9 Lois de Snell–Descartes . . . . .	130
<b>6 Interférence</b>	<b>133</b>
6.1 Introduction . . . . .	133
6.2 Une seule source . . . . .	133
6.3 Deux sources ponctuelles . . . . .	135
6.4 Cohérence des sources . . . . .	141
6.5 Trous de Young . . . . .	143
6.6 Ondes multiples . . . . .	146

# Chapitre 1

## Propagation des ondes

### 1.1 Nature des ondes

De nombreux phénomènes physiques sont décrits par les propriétés de propagation des ondes. On peut citer les ondes se propageant à la surface de l'eau à la suite de la chute d'un objet, les vagues se déplaçant à la surface de la mer, les ondes produites sur les cordes vibrantes, les ondes sonores, les ondes radio, les ondes optiques, etc. Du point de vue mathématique, le mouvement et les propriétés de ces ondes sont décrits, dans une bonne approximation, par une même équation, l'équation de d'Alembert (à une ou à plusieurs dimensions d'espace, suivant le cas), ce qui place l'étude des ondes sur un plan très général.

On peut distinguer deux catégories d'ondes. La première correspond aux ondes d'origine mécanique, élastique, thermodynamique, ou hydrodynamique, qui, pour se manifester ont besoin d'un support matériel préexistant, tel que système de ressorts couplés, corde, gaz, liquide, etc. La seconde correspond aux ondes électromagnétiques (ondes radio, ondes optiques, rayons  $X$ , etc.) dues à la propagation de quantas d'énergie appelés photons, pouvant se déplacer dans le vide, indépendamment de tout milieu matériel préexistant. C'est la théorie de la relativité qui a mis en évidence, au début du vingtième siècle, ce dernier aspect. Auparavant, on supposait que les ondes électromagnétiques se propageaient, par analogie avec les autres types d'onde, dans un milieu ambiant inobservé, appelé éther. Les équations de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, appelées équations de Maxwell, peuvent être considérées comme des équations fondamentales de la Physique

Classique (dans la mesure où les forces gravitationnelles des échelles de l’Astronomie ou de l’Astrophysique ne sont pas considérées), alors que les équations des ondes de la première catégorie sont en général obtenues à partir d’approximations concernant le milieu considéré et l’amplitude des oscillations correspondantes (approximations des petits mouvements ou des petites oscillations).

Dans la majeure partie de ce cours nous considérerons les ondes de la première catégorie, correspondant aux déformations d’un milieu matériel ou aux déplacements d’excitations dans ce milieu. Dans la dernière partie du cours nous étudierons certaines propriétés des ondes optiques, qui sont des ondes électromagnétiques visibles par l’œil humain.

## 1.2 Le phénomène de propagation des ondes

Une onde est généralement produite par la déformation localisée d’un milieu continu ; celle-ci, après sa création, se déplace dans le milieu. Ce phénomène de déplacement est appelé *propagation*. Les exemples les plus visibles d’ondes sont les vagues à la surface de la mer et les excitations créées sur une corde tendue. On peut caractériser une onde par son *amplitude*, qui représente la “hauteur” de la déformation par rapport au milieu, par sa position moyenne à l’instant d’observation, par sa taille autour de sa position moyenne, et par sa vitesse de propagation ou *célérité*. La figure 1.1 représente schématiquement des ondes unidimensionnelles transversales (corde vibrante, vague à la surface de l’eau, etc.).



FIGURE 1.1 – Représentation schématique d’ondes transversales vues de profil.

Pour décrire avec précision les propriétés physiques d’une onde, il est nécessaire de la représenter par une fonction  $u$  décrivant la déformation du milieu en chacun de ses points ; dans les exemples les plus simples vus plus haut,  $u$  représentera la hauteur de la déformation d’une corde ou celle d’une vague à la surface de l’eau.  $u$  sera une fonction

de plusieurs variables et paramètres utilisés pour avoir la description la plus complète. Ainsi, comme l'onde évolue au cours du temps,  $u$  sera une fonction de la variable temps, représentée par le symbole  $t$ . Pour préciser la position de l'onde dans l'espace,  $u$  sera aussi une fonction des coordonnées  $x, y, z$ . Néanmoins, dans un mouvement unidimensionnel, une seule coordonnée,  $x$  par exemple, sera suffisante. Si la propagation de l'onde se fait avec une célérité constante  $c$  (cas des milieux non-résistants ou non-visqueux),  $u$  dépendra du paramètre  $c$ . Dans le cas d'un milieu non-dissipatif et en l'absence de forces extérieures, l'onde se propage en conservant sa forme; dans ce cas, un paramètre  $h$  ou  $A$  peut représenter la hauteur maximale de l'onde ou son *amplitude* (mais celle-ci peut être une quantité algébrique, positive ou négative, ou même complexe). Si l'onde possède des propriétés de périodicité, des paramètres correspondants, tels que pulsation, longueur d'onde ou période, peuvent aussi apparaître.

### 1.3 Propriété fondamentale de la propagation des ondes

Le phénomène de propagation vérifie des propriétés simples qu'on peut mettre en évidence par des considérations générales avant même d'avoir établi et résolu les équations du mouvement.

Nous considérons en général des milieux non-visqueux et non-dissipatifs, ne subissant pas de forces extérieures (en particulier, la force de la pesanteur est négligée). Dans ces milieux, l'onde se propage avec une vitesse constante  $c$  et garde une forme inaltérée. Considérons le cas d'une onde transversale se propageant suivant une direction fixe, que nous choisirons comme l'axe des  $x$ . Supposons qu'à l'instant  $t_0$  cette onde ait une forme localisée autour de la position  $x_0$ , cette dernière représentant l'abscisse de la hauteur maximale de l'onde. La forme de l'onde à tout instant est décrite par la fonction  $u = f(t, x)$ , où  $t$  représente l'instant d'observation de l'onde et  $x$  l'abscisse observée. La valeur de  $f(t, x)$  donne ainsi la hauteur algébrique (c'est-à-dire positive ou négative) de l'onde à la position  $x$  à l'instant  $t$  suivant un axe vertical, que nous choisissons comme étant l'axe des  $z$ . L'onde précédente est représentée schématiquement sur la figure 1.2 à l'instant  $t_0$ ; elle est donc décrite pour tout  $x$  par la fonction  $f(t_0, x)$ ; en particulier, la valeur  $f(t_0, x_0)$  représente à l'instant  $t_0$  la hauteur de l'onde à la position  $x_0$ , qui correspond en fait à sa

hauteur maximale.

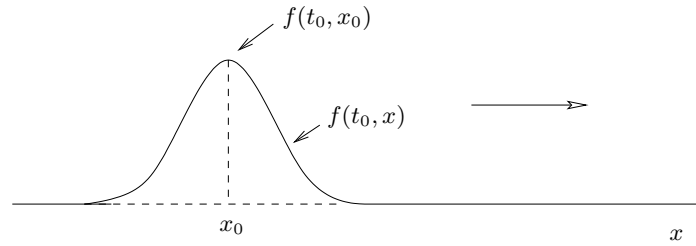


FIGURE 1.2 – Une onde transversale observée à l’instant  $t_0$  et représentée par la fonction  $f(t_0, x)$ . L’onde est localisée autour de l’abscisse  $x_0$ . Sa hauteur maximale se trouve en  $x_0$ . Elle se propage vers la droite.

Aux instants suivants, cette onde se propage sur l’axe des  $x$ . Supposons qu’elle se déplace vers les  $x$  croissants. Observons l’onde à l’instant  $t_1$ , tel que  $t_1 > t_0$ . L’onde, en gardant sa forme inaltérée, se trouve maintenant localisée autour de l’abscisse  $x_1$ , telle que  $x_1 > x_0$ . Sa forme est décrite par la fonction  $f(t_1, x)$ . Sa hauteur maximale correspond à la valeur  $f(t_1, x_1)$ . L’onde est représentée sur la figure 1.3.

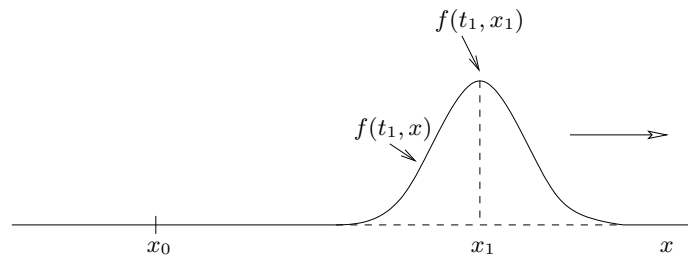


FIGURE 1.3 – Représentation de l’onde à l’instant  $t_1$ .

A partir de la comparaison de la forme de l’onde aux deux instants différents  $t_0$  et  $t_1$  on peut déduire des résultats généraux concernant la structure de la fonction  $f$ . Le fait que le milieu est non dissipatif nous permet de conclure que l’onde est en train de se déplacer sans modification de sa forme ; il s’agit donc d’une translation globale de la forme de l’onde vers les  $x$  croissants. En particulier, si on compare les maxima aux instants  $t_0$  et  $t_1$ , on doit avoir :

$$f(t_1, x_1) = f(t_0, x_0). \quad (1.1)$$



Pour mettre en évidence la structure mathématique inhérente à cette équation, introduisons l'intervalle de temps  $\tau$  écoulé entre les instants  $t_0$  et  $t_1$  :

$$\tau = t_1 - t_0. \quad (1.2)$$

La distance parcourue par l'onde pendant l'intervalle de temps  $\tau$ , qui est égale à  $(x_1 - x_0)$ , peut aussi s'exprimer en fonction de  $\tau$  et de la vitesse de propagation ou célérité  $c$  :

$$x_1 - x_0 = c\tau. \quad (1.3)$$

En éliminant  $t_1$  et  $x_1$ , l'Éq. (1.1) devient :

$$f(t_0 + \tau, x_0 + c\tau) = f(t_0, x_0). \quad (1.4)$$

Mais  $t_0$  est un temps d'observation arbitraire ; on aurait pu choisir comme temps initial toute autre valeur de  $t$ . De même, on aurait pu choisir pour position de comparaison non pas la position du maximum de la hauteur de l'onde, mais tout autre point  $x$ . Ceci signifie que dans l'équation précédente on peut remplacer  $t_0$  et  $x_0$  par tout autre couple  $t$  et  $x$  :

$$f(t + \tau, x + c\tau) = f(t, x). \quad (1.5)$$

Cette équation nous dit que la forme de l'onde, observée à l'instant  $t$ , doit se retrouver à l'instant  $t + \tau$  par une translation d'ensemble de tous ses points constitutifs d'une distance  $c\tau$ . Mais l'intervalle de temps écoulé  $\tau$  est ici un paramètre arbitraire. L'équation (1.5) doit être valable quel que soit  $\tau$ . En particulier, le second membre de l'équation est indépendant de  $\tau$  ; il doit en être de même du premier membre. Ceci n'est possible que si les variables  $t$  et  $x$  dont dépend  $f$  n'apparaissent que dans une combinaison particulière qui devient indépendante de leurs translations respectives  $\tau$  et  $c\tau$ . La fonction  $f$  doit dépendre uniquement de la combinaison  $(x - ct)$  de  $t$  et de  $x$  (ou ce qui est équivalent de  $(t - x/c)$ ) :

$$f(t, x) = F(x - ct). \quad (1.6)$$

On peut maintenant vérifier que si  $f$  a la structure précédente alors l'Éq. (1.5) est satisfaite. En effet, le premier membre devient

$$f(t + \tau, x + c\tau) = F((x + c\tau) - c(t + \tau)) = F(x - ct) = f(t, x), \quad (1.7)$$

qui reproduit bien le second membre de l'Éq. (1.5).

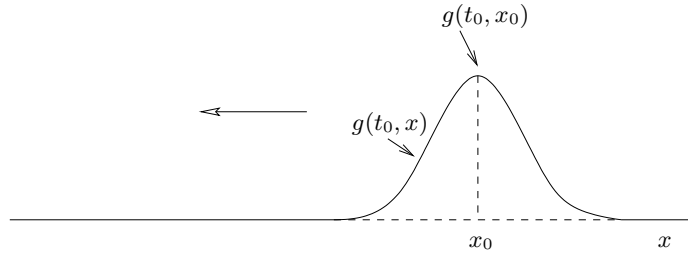


FIGURE 1.4 – Onde représentée à l’instant  $t_0$  par la fonction  $g(t_0, x)$  et se propageant vers la gauche.

Ces considérations peuvent se répéter pour des ondes se propageant vers des  $x$  décroissants. Soit une telle onde représentée par la fonction  $g(t, x)$ . A l’instant  $t_0$  elle est supposée être localisée autour de  $x_0$ , avec le maximum en  $x_0$  (voir Fig. 1.4).

A l’instant  $t_1$ , tel que  $t_1 = t_0 + \tau$ , avec  $\tau > 0$ , l’onde se trouve concentrée autour de l’abscisse  $x_1$ , telle que  $x_1 < x_0$  (voir Fig. 1.5).

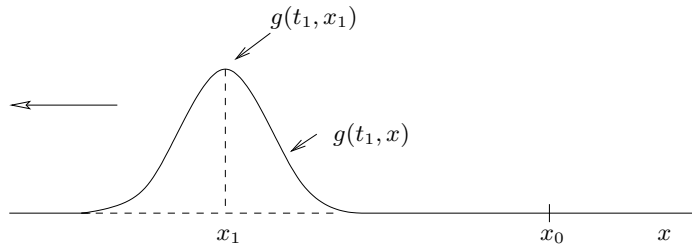


FIGURE 1.5 – Représentation de l’onde se propageant vers les  $x$  décroissants à l’instant  $t_1$ .

Comme avec la fonction  $f$ , nous devons avoir pour  $g$  une équation similaire à l’Éq. (1.1) :

$$g(t_1, x_1) = g(t_0, x_0). \quad (1.8)$$

Puisque l’onde se propage vers les  $x$  décroissants,  $\tau$  et  $c$  étant positifs, on a :

$$x_1 = x_0 - c\tau. \quad (1.9)$$

L’Éq. (1.8) devient :

$$g(t_0 + \tau, x_0 - c\tau) = g(t_0, x_0), \quad (1.10)$$

ou pour tous  $t$  et  $x$  :

$$g(t + \tau, x - c\tau) = g(t, x), \quad (1.11)$$

valable quel que soit  $\tau$ . La solution de cette équation est donnée par les fonctions qui dépendent uniquement de la combinaison  $x + ct$  des variables  $t$  et  $x$  (ou d'une façon équivalente de la combinaison  $(t + x/c)$ ) :

$$g(t, x) = G(x + ct). \quad (1.12)$$

Les ondes  $F$  et  $G$  qui se propagent dans un sens déterminé sur l'axe des  $x$  sont appelées *ondes progressives*.

L'une des propriétés mathématiques importantes des équations du mouvement des ondes est la propriété de *linéarité*. Ainsi, si deux fonctions indépendantes sont solutions de ces équations, leur somme ou d'une façon générale toute combinaison linéaire formée d'elles est aussi solution. Par conséquent, la superposition de deux ondes progressives, l'une se propageant vers les  $x$  croissants et l'autre vers les  $x$  décroissants, reste aussi solution des équations du mouvement des ondes. On peut ainsi représenter la solution générale de l'équation du mouvement des ondes sous la forme suivante, qui découle des résultats précédents :

$$u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct). \quad (1.13)$$

L'expression explicite des fonctions  $F$  et  $G$  dépend des conditions physiques du problème et notamment des conditions initiales imposées au système.

## 1.4 Surfaces d'onde

Les ondes qui se déplacent dans l'espace sont décrites par des fonctions dépendant à chaque instant  $t$  des trois coordonnées d'espace  $x$ ,  $y$  et  $z$  :

$$u = u(t, x, y, z). \quad (1.14)$$

On appelle *surface d'onde* ou *front d'onde* le lieu  $\Sigma(t)$  des points de l'espace pour lesquels la fonction  $u(t, x, y, z)$  a la même valeur à l'instant  $t$ . Physiquement, la surface d'onde est la surface passant par tous les points atteints par l'onde à l'instant  $t$ . Au cours du temps, la surface d'onde  $\Sigma(t)$  se propage, et peut même se déformer si le milieu correspondant est inhomogène. Cette propagation est une représentation de celle de l'onde.

Un exemple simple d'une surface d'onde est donné par la chute d'un objet ponctuel dans un bassin d'eau et l'apparition d'ondes circulaires concentriques à la surface de l'eau et s'éloignant du point de chute (voir Fig. 1.6). Ici, le problème spatial est bidimensionnel ; la fonction  $u$ , qui représente la hauteur de la vague provoquée par la chute de l'objet relativement au niveau d'équilibre du plan d'eau, dépend des variables  $t$ ,  $x$  et  $y$  :  $u = u(t, x, y)$ . Sur chaque cercle de vagues la hauteur est la même, ce qui signifie que  $u$  dépend de  $x$  et de  $y$  à travers le rayon  $\sqrt{x^2 + y^2}$  :  $u = u(t, \sqrt{x^2 + y^2})$ , l'origine des coordonnées étant choisie au point de chute de l'objet, c'est-à-dire au centre des cercles. La surface d'onde est en fait ici un cercle et l'onde est circulaire.

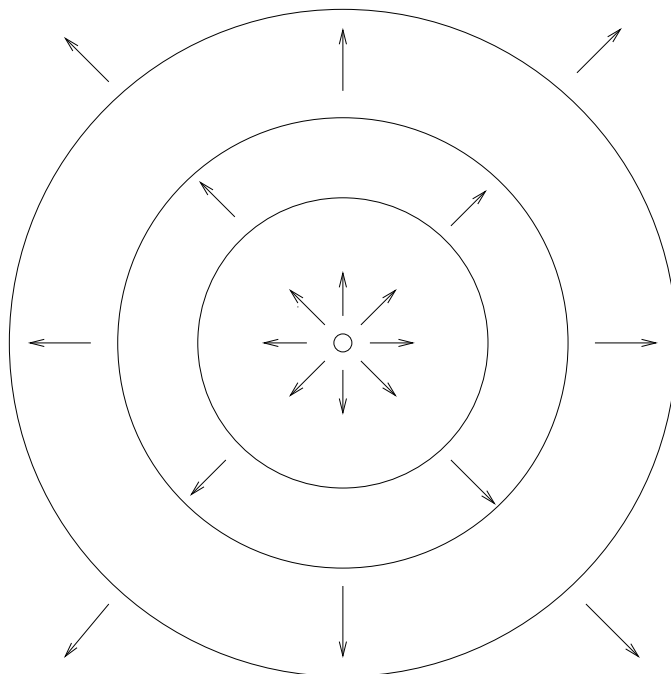


FIGURE 1.6 – Ondes circulaires à la surface de l'eau. Les flèches indiquent le sens de propagation.

Un haut-parleur sphérique peut envoyer dans l'air des ondes à symétrie sphérique. A tout instant, l'amplitude de l'onde sonore sera la même sur une sphère centrée sur le haut-parleur. Dans ce cas, la surface d'onde sera une sphère et l'onde sera sphérique. La fonction  $u$  dépend alors des variables d'espace à travers le rayon  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Un phénomène similaire se produit aussi avec une source lumineuse ponctuelle qui envoie dans l'espace des ondes sphériques.

Des fils électriques longitudinaux peuvent envoyer dans l'air des ondes électromagnétiques ayant la symétrie cylindrique et donnant lieu à des surfaces d'onde cylindriques. Dans ce cas, la dépendance de la fonction  $u$  des variables d'espace est donnée par les variables  $z$  et  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , l'axe des  $z$  coïncidant avec l'axe des cylindres.

Finalement, les surfaces d'onde représentées par des plans donnent lieu à des *ondes planes*. L'onde se propage dans une direction fixe, l'axe des  $x$  par exemple, et la fonction  $u$  prend la même valeur suivant un plan orthogonal à cette direction, donc suivant les plans parallèles au plan  $Oyz$  si la propagation se fait suivant l'axe des  $x$ . Ceci signifie que  $u$  ne peut dépendre de  $y$  et de  $z$  et on a  $u = u(t, x)$ . Mathématiquement, les problèmes avec les ondes planes se ramènent ainsi à des problèmes unidimensionnels d'espace. Des exemples d'ondes planes sont donnés par les ondes sonores se propageant dans des tubes longs et par des ondes électromagnétiques envoyées par des sources lointaines.

## 1.5 Ondes planes sinusoïdales

Parmi les ondes planes, les *ondes planes sinusoïdales* représentent une catégorie importante à cause de leurs propriétés physiques particulières. Ce sont des ondes périodiques dans le temps et à cause de leur propriété de propagation cette périodicité se répercute aussi dans l'espace.

Pour une onde se propageant vers les  $x$  croissants, une représentation de la fonction  $u$  est donnée par l'expression suivante :

$$u(t, x) = A \cos(kx - \omega t + \varphi), \quad (1.15)$$

où  $A$ ,  $k$ ,  $\omega$  et  $\varphi$  sont des constantes, avec  $k > 0$  et  $\omega > 0$ .

Vérifions d'abord qu'il s'agit bien d'une onde progressive du type trouvé dans l'Éq. (1.6). En mettant dans l'argument de la fonction cosinus le paramètre  $k$  en facteur, on obtient pour  $u$  l'expression équivalente

$$u(t, x) = A \cos\left(k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right) + \varphi\right). \quad (1.16)$$

On constate que  $u$  est de la forme  $F(x - ct)$ , pourvu que le rapport  $\omega/k$  soit identifié avec la célérité  $c$  :

$$c = \frac{\omega}{k}. \quad (1.17)$$

La fonction cosinus étant périodique, la fonction  $u$  l'est aussi avec la période  $T = 2\pi/\omega$ .  $\omega$  est la *pulsation* et  $f \equiv \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  la *fréquence*.  $k$  est appelé *nombre d'onde*. La distance parcourue par l'onde pendant une période est appelée *longueur d'onde*  $\lambda$  :

$$\lambda = cT = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.18)$$

Le paramètre  $A$  représente l'*amplitude* de l'onde. La constante  $\varphi$  est appelée *constante de phase* ou *phase à l'origine*.

A cause de la présence de la combinaison linéaire  $(kx - \omega t)$  dans l'argument de la fonction cosinus, la propriété de périodicité dans le temps de la fonction  $u$  se répercute aussi dans l'espace. La fonction  $u$  vérifie ainsi les propriétés de périodicité suivantes :

$$u(t + T, x) = u(t, x), \quad (1.19)$$

$$u(t, x + \lambda) = u(t, x). \quad (1.20)$$

L'onde plane sinusoidale peut aussi être représentée par une fonction sinus. Pour cela, il suffit de remplacer dans l'expression (1.15) la constante de phase  $\varphi$  par  $(\psi - \pi/2)$ . L'expression de la fonction  $u$  devient :

$$u(t, x) = A \sin(kx - \omega t + \psi). \quad (1.21)$$

Contrairement aux exemples d'ondes planes qu'on a considérés dans les sections 1.2 et 1.3, les ondes planes sinusoidales ne sont pas concentrées ou localisées autour d'une abscisse particulière (à  $t$  fixé). Leur propriété de périodicité en  $x$  fait que ces ondes sont étalées, avec une répétition périodique de période égale à la longueur d'onde  $\lambda$ , sur tout l'axe des  $x$ . Des conditions aux limites physiques peuvent cependant empêcher ces ondes de sortir d'un intervalle  $[a, b]$  donné. Par exemple, si une onde plane sinusoidale se propage sur une corde vibrante de longueur  $L$  ou dans un tuyau sonore de longueur  $L$ , la variable  $x$  ne pourra prendre des valeurs que dans l'intervalle  $[0, L]$ , si les deux extrémités du milieu ont pour abscisses 0 et  $L$ .

Pour décrire une onde plane sinusoidale se propageant vers les  $x$  décroissants, il suffit de considérer la combinaison  $(x + ct)$  dans les fonctions cosinus ou sinus. Ainsi, l'onde représentée par la fonction

$$u(t, x) = A' \cos(-k'x - \omega't + \varphi'), \quad (1.22)$$

avec  $k' > 0$  et  $\omega' > 0$ , décrit une propagation vers les  $x$  décroissants. En mettant dans l'argument de la fonction cosinus  $-k'$  en facteur, on retrouve la combinaison  $(x + ct)$ , pourvu qu'on identifie le rapport  $\omega'/k'$  avec la célérité  $c$  :

$$c = \frac{\omega'}{k'}. \quad (1.23)$$

[On préfère changer dans l'expression (1.22) le signe devant  $k'$  par rapport au signe devant  $k$  qui apparaît dans l'expression (1.15), plutôt que celui devant  $\omega'$ , car un changement du sens de propagation concerne les variables d'espace et non du temps. Dans l'espace tridimensionnel, les produits  $kx$  et  $-k'x$  sont remplacés par le produit scalaire d'un vecteur  $\mathbf{k}$  avec le vecteur position  $\mathbf{r}$ ; le vecteur  $\mathbf{k}$  donne alors le sens de propagation de l'onde.]

Il faut noter ici que la célérité ou la vitesse de propagation de l'onde dépend des propriétés intrinsèques du milieu; c'est pourquoi on a dans la relation précédente  $c$  (la même que dans l'Éq. (1.17)) et non  $c'$ , même si la pulsation et le nombre d'onde sont différents pour l'onde se propageant vers les  $x$  décroissants comparés au cas de l'onde se propageant vers les  $x$  croissants. On a supposé dans les exemples (1.15) et (1.22) que les deux ondes se propagent dans le même milieu.

## 1.6 Représentation complexe

On peut aussi décrire les ondes planes sinusoïdales par une représentation complexe. Les fonctions cosinus et sinus étant respectivement les parties réelle et imaginaire de la fonction exponentielle complexe de module 1,  $e^{ix}$ , avec  $x$  réel,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (1.24)$$

on peut introduire une fonction complexe  $\tilde{u}(t, x)$ , telle que  $u(t, x)$  en soit la partie réelle :

$$\tilde{u}(t, x) = Ae^{i(kx - \omega t + \varphi)}. \quad (1.25)$$

( $A$  est ici réel.) La fonction (1.15) vérifie ainsi la relation

$$u(t, x) = \mathcal{R}e(\tilde{u}(t, x)). \quad (1.26)$$

De même, la fonction (1.22) sera la partie réelle de

$$\tilde{u}(t, x) = A'e^{i(-k'x - \omega't + \varphi')}, \quad (1.27)$$

$A'$  étant réel.

L'intérêt d'utiliser pour ces ondes une représentation complexe vient du fait que les fonctions exponentielles ont des propriétés très simples par rapport aux opérations de dérivation et d'intégration qu'on peut rencontrer au cours des calculs. Tant que les fonctions  $u$  apparaissent linéairement dans les calculs, on peut les remplacer par leur représentation complexe  $\tilde{u}$  et à la fin des calculs revenir à la partie réelle du résultat final. Par exemple, la fonction (1.25) vérifie les propriétés suivantes par rapport aux opérations de dérivation et d'intégration :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= -i\omega \tilde{u}, & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &= ik \tilde{u}, \\ \int^t dt' \tilde{u}(t', x) &= -\frac{1}{i\omega} \tilde{u}(t, x), & \int^x dx' \tilde{u}(t, x') &= \frac{1}{ik} \tilde{u}(t, x). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Au cours de ces opérations, la fonction  $\tilde{u}$  ne change pas de nature et est simplement multipliée par un coefficient constant. Dans de nombreuses équations différentielles ou intégrales, elle pourra ainsi être factorisée et laisser la place à une équation algébrique plus facile à résoudre. (Cf. par exemple les méthodes de résolution des équations des circuits RLC.)

A titre d'exemple, supposons qu'on voudrait calculer la dérivée partielle par rapport à  $x$  de la fonction (1.15). On trouve :  $\frac{\partial u}{\partial x} = -kA \sin(kx - \omega t + \varphi)$ . En utilisant la représentation complexe (1.25) et la deuxième Éq. (1.28) et en revenant à la partie réelle, on vérifie que  $\mathcal{R}e\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right) = -kA \sin(kx - \omega t + \varphi)$ , qui reproduit le résultat précédent.

[Remarquons que la fonction  $u$  étant une fonction de plusieurs variables indépendantes, ici  $t$  et  $x$ , la dérivée par rapport à l'une des variables est appelée dérivée partielle et représentée par le symbole  $\frac{\partial}{\partial t}$  ou  $\frac{\partial}{\partial x}$ . Au cours du calcul d'une dérivée partielle, les autres variables sont maintenues constantes.]



# Chapitre 2

## Cordes vibrantes

### 2.1 Introduction

Une corde est un milieu continu unidimensionnel ayant une longueur finie ou parfois infinie. Elle possède généralement des propriétés d'élasticité et peut être tendue à ses deux extrémités et être amenée à une longueur supérieure à sa longueur de repos. Dans ce cas, elle possède une tension interne dont l'effet est d'attirer toute portion de la corde vers sa position d'équilibre. Pour une corde tendue, la position d'équilibre correspond à la ligne droite joignant les deux extrémités.

La corde tendue peut être modélisée au niveau microscopique par la juxtaposition de ressorts de taille infinitésimale couplés entre proches voisins et exerçant l'un sur l'autre des forces de rappel. Lorsqu'on écarte une portion de la corde de sa position d'équilibre (c'est-à-dire de la ligne droite) elle subit immédiatement les forces de rappel des portions voisines et il en résulte un mouvement oscillatoire autour de la position d'équilibre qui crée une onde qui se propage sur toute la corde.

Le mouvement d'une corde tendue écartée de sa position d'équilibre peut se faire dans les trois directions d'espace. On peut cependant distinguer deux cas. Un mouvement transversal ou orthogonal à la position d'équilibre de la corde tendue et un mouvement longitudinal à la corde. Nous nous intéresserons dans ce cours uniquement au mouvement transversal et nous préciserons chaque fois qu'il est nécessaire les conditions physiques qui empêchent la corde d'avoir un mouvement longitudinal. Le mouvement transversal peut se faire en chaque point de la corde dans le plan orthogonal à la corde. Ainsi, si la

corde tendue se trouve à l'état d'équilibre le long de l'axe des  $x$ , les plans orthogonaux à la corde sont parallèles au plan  $Oyz$ . Le mouvement transversal est donc en général bidimensionnel dans ces plans. Nous considérerons le cas simplifié d'un mouvement transversal unidimensionnel, parallèlement à l'un des axes orthogonaux à  $Ox$ , que nous choisissons comme étant l'axe des  $z$ . Nous supposerons que les conditions initiales imposées, ainsi que d'autres conditions physiques, assurent à la corde la possibilité d'avoir un tel mouvement au cours du temps.

Un point de la corde sera repéré par l'abscisse  $x$  de sa position d'équilibre, qui reste inchangé au cours du temps, et par l'ordonnée  $z$  qui représente l'écart algébrique (positif ou négatif) de sa position à partir de l'axe d'équilibre  $Ox$  de la corde. Comme ce point se déplace au cours du temps, l'ordonnée  $z$  est une fonction du temps,  $z = z(t)$ . L'ensemble des points de la corde seront repérés par une seule fonction  $u(t, x)$ , dans laquelle  $t$  représente l'instant d'observation de la corde et  $x$  l'abscisse du point observé, alors que  $u(t, x)$  représente l'ordonnée  $z$  de ce point (avec abscisse  $x$ ) à cet instant  $t$  (voir Fig. 2.1). A un instant  $t$  donné, la fonction  $u(t, x)$ , considérée comme fonction de  $x$ , donne la courbe continue formée par la corde dans le plan  $Oxz$ .

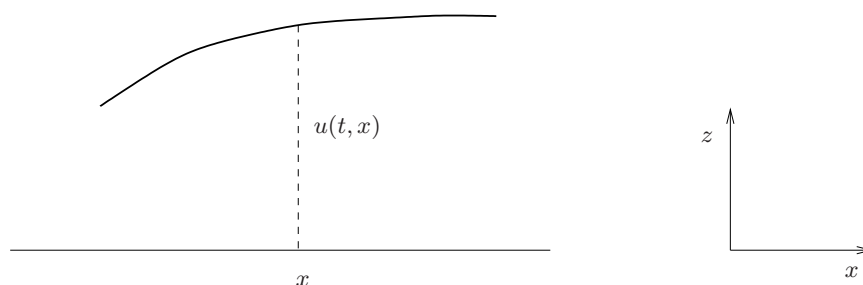


FIGURE 2.1 – Un point de la corde repéré à l'instant  $t$  par son abscisse  $x$  et son ordonnée  $u(t, x)$ .

## 2.2 Équation des cordes vibrantes

Nous considérons une corde tendue caractérisée par une tension interne  $T$ . La tension a la dimension d'une force et représente la force attractive exercée par une partie de la corde sur son voisinage immédiat. De ce fait, la tension est portée par un vecteur tangent

à la corde au point considéré et dirigé vers la partie de la corde exerçant cette force. Nous supposons pour le moment que la tension dépend aussi du point de la corde considéré et par conséquent est une fonction de l'abscisse  $x$  :  $T = T(x)$ . La corde a en outre une masse définie par une masse linéique  $\mu$  (masse par unité de longueur). Pour le cas général d'une corde non-homogène, la masse linéique n'est pas constante et dépend de  $x$  :  $\mu = \mu(x)$ .

Au cours des calculs, nous nous placerons dans *l'approximation des petits mouvements*, pour laquelle les déformations transversales de la corde sont très petites par rapport à la longueur à l'équilibre de la corde tendue.

Pour établir l'équation du mouvement de la corde, nous considérons une tranche infinitésimale de la corde correspondant à l'intervalle  $[x, x+dx]$  (Fig. 2.2). La tension exercée sur la tranche par son voisinage se trouvant à sa gauche est égale en module à  $T(x)$  et est dirigée vers l'extérieur, faisant un angle  $\theta(x)$  avec l'axe des  $x$ . L'angle  $\theta$  est algébrique et est compté positivement dans le sens trigonométrique à partir de l'horizontale. La tension exercée sur la tranche par son voisinage se trouvant à sa droite est égale en module à  $T(x+dx) = T(x) + dT(x)$  et est dirigée aussi vers l'extérieur, faisant un angle  $\theta(x+dx) = \theta + d\theta$  avec l'axe des  $x$ . Dans le calcul des forces en présence, on peut ignorer les tensions internes à la tranche, car elles s'annulent mutuellement. En effet, chaque point interne de la tranche subit des tensions égales en modules (à cause de la continuité de  $T$ ) et opposées en sens par ses voisinages de gauche et de droite. Les seuls points particuliers restants, qui sont les points extrêmes de la tranche, ont une masse nulle (ayant une épaisseur nulle) et ne peuvent contribuer à eux seuls à l'équation du mouvement.

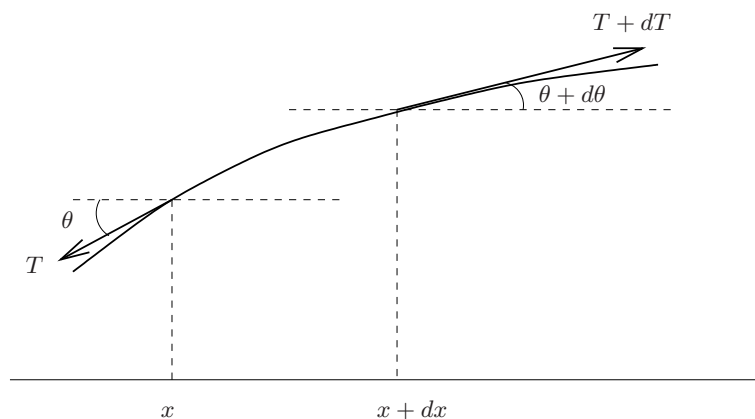


FIGURE 2.2 – Tensions exercées sur une tranche infinitésimale de la corde tendue.

La projection des forces sur l'axe des  $x$  nous donne :

$$dF_x = (T + dT) \cos(\theta + d\theta) - T \cos \theta. \quad (2.1)$$

Dans l'approximation des petits mouvements, l'angle  $\theta(x)$  (exprimé en radian) reste petit devant 1. Dans ce cas, on peut faire l'approximation  $\cos \theta = 1 - \theta^2/2 + \dots \simeq 1$ . L'équation (2.1) devient :

$$dF_x = dT. \quad (2.2)$$

La force  $dF_x$  étant dirigée suivant l'axe des  $x$  représente une force longitudinale à la corde dans son état d'équilibre. La présence d'une force longitudinale engendre inévitablement, quelles que soient les conditions initiales, un mouvement longitudinal des points de la corde. Comme on s'intéresse uniquement au mouvement transversal de la corde, il est nécessaire que la composante (2.2) de la force soit nulle. Par conséquent on doit avoir :

$$dT = 0, \quad T = T_0 = \text{constante}. \quad (2.3)$$

Par conséquent, une condition nécessaire pour empêcher l'apparition d'un mouvement longitudinal des points de la corde est que la tension  $T$  de la corde soit constante partout. En choisissant à l'instant initial les composantes longitudinales des vitesses nulles, la corde aura aux instants ultérieurs uniquement un mouvement transversal.

La projection des forces sur l'axe des  $z$  donne :

$$dF_z = (T + dT) \sin(\theta + d\theta) - T \sin \theta. \quad (2.4)$$

En faisant l'approximation  $\sin \theta = \theta - \theta^3/3! + \dots \simeq \theta$  et en tenant compte de l'Éq. (2.3), l'Éq. (2.4) devient :

$$dF_z = T_0 d\theta. \quad (2.5)$$

D'autre part, pour  $\theta$  petit, on a aussi  $\theta \simeq \tan \theta$ . Or,  $\tan \theta$  représente aussi la pente, à l'instant  $t$ , de la courbe  $u(t, x)$  au point  $x$  de la corde, qui est donnée par la dérivée (partielle) de  $u$  par rapport à  $x$ . Nous avons ainsi :

$$\theta \simeq \tan \theta = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Pour avoir  $d\theta$ , il suffit de différentier l'expression précédente à  $t$  constant :

$$d\theta = d \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (2.7)$$

L'équation (2.4) devient :

$$dF_z = T_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) - T_0 \frac{\partial u}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (2.8)$$

La vitesse de la corde au point  $x$  est donné par la dérivée première de  $u$  par rapport au temps :

$$v(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Puisque  $u$  représente le déplacement transversal des points de la corde, la vitesse  $v$  représente aussi une vitesse transversale à l'axe de la corde.

L'accélération en  $x$  est donnée par la dérivée seconde de  $u$  par rapport au temps :

$$a(t, x) = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

La masse de la tranche considérée est  $dM(x) = \mu(x)dx$ . L'équation du mouvement (ou équation de Newton, c'est-à-dire masse  $\times$  accélération = force extérieure) devient :

$$\mu(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx. \quad (2.11)$$

En divisant par  $\mu(x)dx$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.12)$$

Nous considérerons désormais une corde homogène, de masse linéique uniforme  $\mu_0$ . L'équation (2.12) devient :

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu_0} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}. \quad (2.13)$$

En définissant

$$c^2 = \frac{T_0}{\mu_0}, \quad (2.14)$$

l'Éq. (2.13) s'écrit aussi :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.15)$$

C'est l'équation du mouvement des cordes vibrantes. Au niveau mathématique, elle est appelée *équation de d'Alembert* à une dimension d'espace. La constante  $c$  sera ultérieurement identifiée avec la *vitesse de propagation* ou *célérité* de l'onde. A titre d'exemple, si la tension de la corde est  $T_0 = 50$  N (ce qui équivaut approximativement à la force exercée par le poids d'une masse de 5 kg) et sa masse linéique  $\mu_0 = 50$  g m<sup>-1</sup>, on trouve  $c = 31,7$  m s<sup>-1</sup>.

En revenant à l'Éq. (2.8), effectuons-y directement la limite  $dx \rightarrow 0$ . Nous constatons que dans cette limite  $dF_z = 0$ , c'est à dire que la force totale agissant sur le point d'abscisse  $x$  est nulle :

$$F_z(x) = T_0 \frac{\partial u}{\partial x} - T_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.16)$$

La force agissant de droite est égale à  $T_0 \frac{\partial u}{\partial x}$  et celle agissant de gauche est égale à  $-T_0 \frac{\partial u}{\partial x}$ . Le fait que la force totale agissant sur chaque point de la corde est nulle ne contredit pas l'existence d'une accélération. Ce phénomène résulte simplement du fait que la masse du point considéré est nulle. Pour mettre en évidence l'accélération d'un point de la corde il faut considérer un intervalle infinitésimal entourant ce point ainsi que la masse contenue dans cet intervalle, puis diviser l'équation du mouvement par le même intervalle (cf. Éqs. (2.11)-(2.12)). L'accélération en un point de la corde, et en général en un point d'un milieu matériel continu, dépend en fait de la *densité* de force totale (force linéique, force surfacique ou force volumique, selon les dimensions spatiales du milieu) agissant en ce point et non de la force totale.

## 2.3 Conditions de raccordement

L'équation (2.13) régit le mouvement d'une corde homogène de masse linéique uniforme  $\mu_0$  et de tension constante  $T_0$ . On peut cependant rencontrer le cas de cordes composées de la juxtaposition de plusieurs autres cordes plus courtes collées ou raccordées l'une à l'autre à leurs extrémités. Comment décrire le mouvement d'un tel système ? Nous considérerons pour cela le cas le plus simple de deux cordes de masses linéiques et de tensions respectives  $\mu_{10}$ ,  $T_{10}$ ,  $\mu_{20}$ ,  $T_{20}$ , raccordées au point  $x_0$  et formant une seule corde.

Les déplacements de la corde 1 seront décrits par la fonction  $u_1(t, x)$  ( $x \leq x_0$ ) et ceux de la corde 2 par la fonction  $u_2(t, x)$  ( $x_0 \leq x$ ). Ces déplacements vont séparément satisfaire à l'équation des cordes (2.13) dans leurs régions respectives. On aura ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{T_{10}}{\mu_{10}} \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2}, & x \leq x_0, \\ \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial t^2} &= \frac{T_{20}}{\mu_{20}} \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x^2}, & x_0 \leq x. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Il reste à déterminer les conditions de raccordement des deux cordes au point d'abscisse  $x_0$ . Dans le cas général où  $T_{10} \neq T_{20}$  la corde globale aura une tension non-constante. En

effet, au point de raccordement, la tension subit une discontinuité :

$$\Delta T = T_{20} - T_{10}. \quad (2.18)$$

D'après l'Éq. (2.2), une telle discontinuité implique l'existence d'une force longitudinale en  $x = x_0$  qui induit à la corde un mouvement longitudinal. Pour empêcher l'apparition d'un tel mouvement, il est nécessaire de maintenir par une force extérieure le point de raccordement à l'abscisse  $x_0$ . Pour cela on réalise le raccordement par l'intermédiaire d'un anneau pouvant coulisser librement (sans frottement) sur une tige placée verticalement à l'abscisse  $x_0$  (Fig. 2.3). On néglige pour le moment la masse de l'anneau.

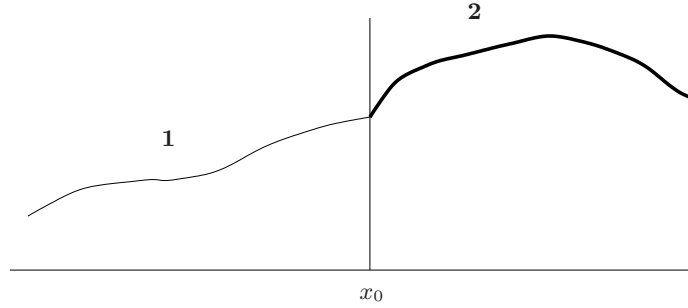


FIGURE 2.3 – Le point de raccordement coulisse librement sur une tige verticale.

La première condition de raccordement provient de la continuité de la fonction  $u$  au point  $x_0$  :

$$u_1(t, x_0) = u_2(t, x_0) = u(t, x_0). \quad (2.19)$$

Cette équation, étant valable pour tout  $t$ , implique aussi, par dérivation par rapport à  $t$ , des équations similaires pour la vitesse, l'accélération, etc.

Pour obtenir la deuxième condition de raccordement, nous considérons un intervalle  $dx$  entourant  $x_0$  ( $dx/2$  à sa gauche et  $dx/2$  à sa droite). D'après les Éqs. (2.4) et (2.6), la force totale agissant sur cette tranche de la corde est :

$$\begin{aligned} dF_z(t, x_0) &= T_{20} \sin \theta_2(x_0 + \frac{dx}{2}) - T_{10} \sin \theta_1(x_0 - \frac{dx}{2}) = T_{20}\theta_2 - T_{10}\theta_1 \\ &= T_{20} \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0+dx/2} - T_{10} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0-dx/2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

En tenant compte de la continuité de l'accélération en  $x_0$  [Éq. (2.19) et suite] l'équation du mouvement de la tranche s'écrit :

$$\frac{1}{2}(\mu_{10} + \mu_{20})dx \frac{\partial^2 u(t, x_0)}{\partial t^2} = T_{20} \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0+dx/2} - T_{10} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0-dx/2}. \quad (2.21)$$

L'accélération et les masses linéiques étant des quantités finies, le premier membre de cette équation tend vers zéro lorsque la limite  $dx = 0$  est prise. Par conséquent, le deuxième membre doit aussi tendre vers zéro dans cette limite. D'où on déduit :

$$T_{10} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = T_{20} \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0}. \quad (2.22)$$

C'est la deuxième condition de raccordement. Elle traduit le fait que la force totale agissant sur le point d'abscisse  $x_0$  est nulle, comme d'ailleurs en chaque point d'une corde, propriété que nous avons soulignée à la fin de la Sect. 2.2 [Éq. (2.16)].

Dans le cas général où  $T_{10} \neq T_{20}$ , on constate que la pente de la corde à gauche et à droite de  $x_0$  n'est pas continue et on voit apparaître sur la corde un "effet de coude" (Fig. 2.3). (Toutefois, la pente doit avoir le même signe à gauche et à droite de  $x_0$ ,  $T_{10}$  et  $T_{20}$  étant positifs.) C'est uniquement dans le cas particulier où  $T_{10} = T_{20}$  que la pente sera continue en  $x_0$ . Notons en outre que la condition (2.22) est aussi valable sur une seule corde, en des points arbitraires ( $x_0 = x$ ). Dans ce cas  $T_{10} = T_{20} = T_0$  et la condition précédente équivaut tout simplement à la continuité de la pente de la corde en tous ses points.

Un cas particulier de l'Éq. (2.22) est celui où une seule corde, fixée à l'abscisse  $x = 0$ , a l'autre extrémité ( $x = L$ ) libre de se déplacer sur une tige verticale (Fig. 2.4) (celle-ci empêchant le mouvement longitudinal). On peut alors considérer que la corde est raccordée

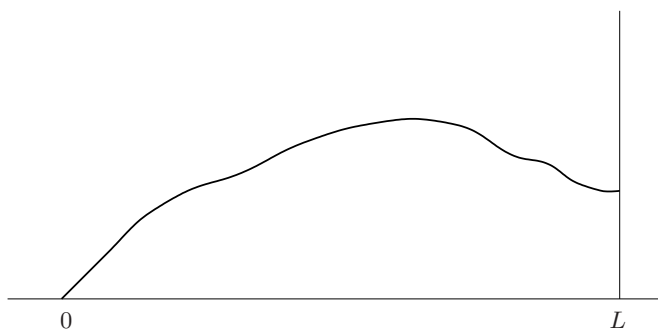


FIGURE 2.4 – Corde avec une extrémité libre.

à l'abscisse  $x = L$  à une deuxième corde de tension nulle. Dans ce cas, le deuxième membre de l'Éq. (2.22) est nul et on obtient l'équation :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, \quad (2.23)$$



qui est la condition aux limites relative à l'extrémité libre de la corde, valable pour tout  $t$ . Nous notons que cette condition signifie que la pente de la corde reste horizontale au cours du temps à son extrémité libre.

Nous considérons maintenant le cas plus général où la masse  $m$  de l'anneau coulissant sur la tige n'est plus négligeable. (En revanche, la force de la pesanteur agissant sur l'anneau est négligée.) Elle intervient dans la deuxième condition de raccordement, relative aux forces agissant autour de  $x = x_0$ . La masse totale contenue dans l'intervalle  $dx$  autour de  $x = x_0$  est maintenant  $(m + (\mu_{10} + \mu_{20})dx/2)$  et dans le premier membre de l'Éq. (2.21) c'est elle qui multiplie l'accélération. Dans la limite  $dx = 0$ , l'Éq. (2.22) est remplacée par :

$$m \frac{\partial^2 u(t, x_0)}{\partial t^2} = T_{20} \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} - T_{10} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0}. \quad (2.24)$$

On remarque que même pour  $T_{10} = T_{20}$  la continuité de la pente en  $x = x_0$  n'est plus assurée à cause de la non-nullité générale du premier membre.

De même, si on a une seule corde libre de se déplacer en  $x = L$  le long d'une tige verticale par l'intermédiaire d'un anneau de masse  $m$ , il suffit de remplacer  $T_{20}$  par 0 dans l'Éq. (2.24). La condition aux limites devient :

$$m \frac{\partial^2 u(t, L)}{\partial t^2} = -T_0 \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=L}. \quad (2.25)$$

Finalement, dans le cas où la corde est fixée à une extrémité, par exemple d'abscisse  $x_0$ , on doit imposer aux solutions de l'Éq. (2.13) la condition aux limites :

$$u(t, x_0) = 0, \quad (2.26)$$

valable pour tout  $t$ .

Les conditions aux limites (2.26) et (2.23) peuvent être utilisées pour traiter les divers cas qui se présentent pour une corde vibrante avec des extrémités fixes ou libres.

## 2.4 Résolution de l'équation du mouvement

Nous avons vu dans la section 1.3, à partir de considérations générales sur la propagation des ondes, que les ondes progressives s'expriment à l'aide de fonctions dépendant des combinaisons  $(x - ct)$  et  $(x + ct)$  des variables  $t$  et  $x$ , respectivement pour les ondes se propageant vers les  $x$  croissants et les  $x$  décroissants. Ceci suggère que pour trouver la

solution générale de l'équation du mouvement (2.15), il serait utile d'utiliser dès le début ces combinaisons comme nouvelles variables indépendantes. A cet effet, nous définissons les variables

$$v = x - ct, \quad w = x + ct. \quad (2.27)$$

La fonction  $u$  peut alors être considérée comme une fonction de  $v$  et de  $w$  :

$$u = u(v, w), \quad (2.28)$$

puisque  $t$  et  $x$  peuvent être exprimés en fonction de  $v$  et de  $w$  :

$$t = -\frac{1}{2c}(v - w), \quad x = \frac{1}{2}(v + w). \quad (2.29)$$

Des variations infinitésimales arbitraires des variables  $v$  et  $w$  entraînent une variation infinitésimale de  $u$  :

$$du = \frac{\partial u}{\partial v} dv + \frac{\partial u}{\partial w} dw. \quad (2.30)$$

[Cette formule est une généralisation de celle correspondant au cas des fonctions d'une seule variable. La variation infinitésimale totale d'une fonction de plusieurs variables est égale à la somme des contributions provenant des variations des variables indépendantes. La dérivée par rapport à une variable indépendante est appelée dérivée partielle, représentée ici par les symboles  $\frac{\partial}{\partial v}$  ou  $\frac{\partial}{\partial w}$ . Au cours d'une dérivation partielle, les autres variables sont maintenues constantes.] Mais les variables  $v$  et  $w$  peuvent elles-mêmes être considérées comme des fonctions de  $x$  et de  $t$  et on peut déduire leurs variations infinitésimales à partir de celles de  $x$  et de  $t$  :

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt, \quad dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial t} dt. \quad (2.31)$$

En remplaçant ces expressions dans l'Éq. (2.30) on obtient :

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} \right) dt. \quad (2.32)$$

On peut comparer cette formule à celle qu'on obtient en considérant  $u$  comme fonction de  $x$  et de  $t$  :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt. \quad (2.33)$$

Comme  $dx$  et  $dt$  représentent des variations indépendantes, on en déduit les relations nous donnant les règles des dérivations composées dans le cas de plusieurs variables :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (2.35)$$

Les dérivées partielles de  $v$  et de  $w$  par rapport à  $x$  et à  $t$  sont obtenues à partir des Éqs. (2.27) :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -c, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = c. \quad (2.36)$$

En les remplaçant dans les Éqs. (2.34)-(2.35), on trouve :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial v} + c \frac{\partial u}{\partial w}, \quad (2.37)$$

soit aussi sous forme opératorielle :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -c \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial w} \right). \quad (2.38)$$

Ces résultats nous permettent de calculer les dérivées partielles secondes par rapport à  $x$  et à  $t$  :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial w} \right)^2 = c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right). \quad (2.40)$$

En les remplaçant dans l'équation du mouvement (2.15), on obtient :

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \right) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} \right), \quad (2.41)$$

ce qui donne finalement :

$$\frac{\partial^2 u(v, w)}{\partial v \partial w} = 0. \quad (2.42)$$

La solution générale de l'Éq. (2.42) est une superposition d'une fonction dépendant uniquement de  $v$  et d'une fonction dépendant uniquement de  $w$  :

$$u(v, w) = F(v) + G(w). \quad (2.43)$$

On peut facilement vérifier que la forme précédente est une solution de l'Éq. (2.42). On a en effet :

$$\frac{\partial u}{\partial v} = F'(v), \quad (2.44)$$

la prime désignant la dérivation par rapport à l'argument de la fonction. (La fonction  $G$ , étant indépendante de  $v$ , donne zéro par dérivation par rapport à  $v$ .) Continuant la dérivation, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial w \partial v} = \frac{\partial F'(v)}{\partial w} = 0; \quad (2.45)$$

la fonction  $F$  et sa dérivée ne dépendant pas de  $w$ , la dérivée de  $F'$  par rapport à  $w$  a donné zéro. Un résultat analogue est obtenu en inversant l'ordre des dérivations entre  $v$  et  $w$ .

En revenant aux définitions (2.27) on a ainsi :

$$u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct), \quad (2.46)$$

qui n'est autre que l'expression générale (1.13) trouvée au chapitre 1. Nous rappelons que la fonction  $F(x - ct)$  décrit une onde se propageant vers les  $x$  croissants et la fonction  $G(x + ct)$  décrit une onde se propageant vers les  $x$  décroissants.

Nous constatons, d'après l'expression (2.46) et les considérations de la section 1.3, que le paramètre  $c$  défini par la formule (2.14) représente bien la vitesse de propagation de l'onde. Il faut cependant noter ici la distinction entre la vitesse de propagation ou célérité de l'onde et la vitesse de déplacement ou vitesse vibratoire des points constitutifs de la corde. La propagation de l'onde représente le déplacement d'une déformation quelconque de la corde *longitudinalement* à l'axe d'équilibre de la corde tendue. Au cours de cette propagation, seule la déformation se déplace; les points constitutifs de la corde restent à des abscisses fixes et ont simplement *un mouvement vibratoire transversal* à la corde. Leur vitesse de déplacement est donnée par la formule (2.9); celle-ci n'est pas constante en général et n'a aucun lien direct en général avec  $c$ .

Des exemples d'ondes progressives sont donnés par les ondes planes sinusoïdales et ont été considérés dans les sections 1.5 et 1.6.

Notons finalement que les ondes progressives  $F$  et  $G$  vérifient, d'après les Éqs (2.36)-(2.38), les propriétés suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x - ct) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}F(x - ct), \quad \frac{\partial}{\partial x}G(x + ct) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}G(x + ct). \quad (2.47)$$

## 2.5 Conditions initiales et conditions aux limites

Les fonctions  $F$  et  $G$  sont généralement déterminées par les conditions initiales imposées à la corde. Supposons qu'à l'instant initial  $t = 0$  la corde ait une forme donnée par une courbe  $f(x)$ . On aura :

$$u(0, x) = f(x). \quad (2.48)$$

En utilisant l'expression (2.46) à  $t = 0$ , on obtient :

$$u(0, x) = F(x) + G(x) = f(x). \quad (2.49)$$

Supposons aussi que les vitesses initiales (divisées par  $c$ ) des points de la corde soient données par une fonction de  $x$  qu'on notera  $g'(x) = \frac{dq}{dx}$ . (On préfère représenter cette fonction sous la forme de la dérivée spatiale d'une autre fonction  $g$  pour des raisons de dimensionnalité : les fonctions  $f$  et  $g$  ont alors la même dimension. Toute fonction de  $x$  peut en général être considérée comme la dérivée d'une autre fonction de  $x$ .) La condition initiale des vitesses s'écrit alors :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=0} = g'(x). \quad (2.50)$$

On peut calculer la dérivée de l'expression (2.46) par rapport au temps en utilisant la règle de la dérivation composée qui est déjà donnée par la deuxième des Éqs. (2.37) ; on trouve :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w} = -F'(v) + G'(w) \quad (2.51)$$

(la dérivée de  $F$  par rapport à  $w$  et celle de  $G$  par rapport à  $v$  étant nulles). Dans la limite  $t = 0$ ,  $v$  et  $w$  se réduisent à  $x$  et on obtient :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = -F'(x) + G'(x) = g'(x). \quad (2.52)$$

Ainsi, les fonctions  $F$  et  $G$  vérifient les deux conditions initiales (2.49) et (2.52). Comme l'Éq. (2.52), concernant les deux derniers membres, fait intervenir uniquement des dérivées par rapport à  $x$ , elle peut être immédiatement intégrée et donne :

$$-F(x) + G(x) = g(x). \quad (2.53)$$

Il faut remarquer à ce niveau que le passage de  $g'(x)$  à  $g(x)$  pourrait faire intervenir une constante additive arbitraire ; mais celle-ci peut être absorbée par une redéfinition des fonctions  $F$  et  $G$ . En effet, toute constante peut être considérée à la fois comme une fonction de  $(x - ct)$  et de  $(x + ct)$ . Si le deuxième membre de l'Éq. (2.53) est remplacée par  $g + C$ , où  $C$  est une constante, on peut redéfinir  $F$  et  $G$  respectivement par  $F \rightarrow F - C/2$  et  $G \rightarrow G + C/2$ , ce qui neutralise la constante  $C$  du deuxième membre. D'autre part, ces redéfinitions de  $F$  et de  $G$  ne modifient pas la somme  $F + G$  qui intervient dans la première condition initiale (2.49).

En résumé, les deux conditions initiales (2.49) et (2.50) s'écrivent :

$$F(x) + G(x) = f(x), \quad (2.54)$$

$$-F(x) + G(x) = g(x). \quad (2.55)$$

Elles peuvent être résolues en fonction de  $f$  et de  $g$  :

$$F(x) = \frac{1}{2}(f(x) - g(x)), \quad (2.56)$$

$$G(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)). \quad (2.57)$$

Comme la fonction  $F$  évolue au cours du temps suivant la loi  $F(x - ct)$  et la fonction  $G$  suivant la loi  $G(x + ct)$ , il suffit de faire les remplacements correspondants dans les Éqs. (2.56)-(2.57) et de revenir à l'expression de  $u$  [Éq. (2.46)] :

$$u(t, x) = \frac{1}{2}[f(x - ct) - g(x - ct)] + \frac{1}{2}[f(x + ct) + g(x + ct)]. \quad (2.58)$$

Ainsi, la donnée des conditions initiales sur la forme de la corde et la répartition des vitesses conduit à la détermination complète de l'évolution de la corde aux instants ultérieurs. Les fonctions  $f$  et  $g$  étant connues par les conditions initiales, on connaît par l'Éq. (2.58) la forme de la corde à tout instant. A noter que toute constante additive dans  $g$  disparaît de l'expression de  $u$ .

L'étude de quelques cas particuliers nous permet de mieux comprendre le rôle des fonctions  $f$  et  $g$  qui entrent dans l'expression de la fonction  $u$ .

Supposons qu'on déforme la corde à l'instant initial  $t = 0$  suivant une courbe  $f(x)$  et qu'on la lâche sans vitesse initiale. Dans ce cas, la fonction  $g$  est nulle,  $g(x) = 0$ , d'après l'Éq. (2.50) (Fig. 2.5).

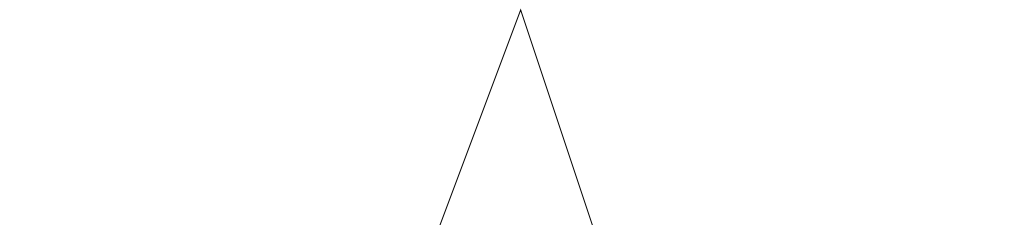


FIGURE 2.5 – Forme de la corde à l'instant initial  $t = 0$ . La corde est lâchée sans vitesse initiale.

La solution (2.58) prend la forme

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)]. \quad (2.59)$$

On voit qu'aux instants ultérieurs deux ondes progressives d'égales amplitudes,  $f/2$ , apparaissent sur la corde et se propagent en sens opposés (Fig. 2.6).



FIGURE 2.6 – Forme de la corde à des instants ultérieurs,  $t > 0$ .

Considérons maintenant un autre cas particulier où la corde n'est pas déformée à l'instant initial, donc  $f(x) = 0$  (corde confondue avec l'axe des  $x$ ), mais une vitesse initiale est donnée à ses points en lui donnant un coup. La répartition des vitesses est donnée par la fonction  $g(x)$  [Éq. (2.50)] (Fig. 2.7).

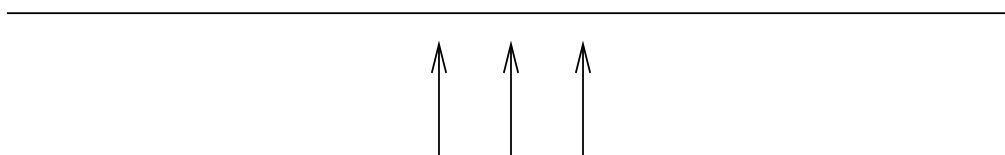


FIGURE 2.7 – Forme de la corde à l'instant initial  $t = 0$ . Un coup instantané est donné sur une partie de la corde (suivant les flèches) procurant des vitesses initiales égales à tous les points appartenant à cet intervalle.

La solution (2.58) prend la forme

$$u(t, x) = \frac{1}{2} [-g(x - ct) + g(x + ct)]. \quad (2.60)$$

On voit qu'aux instants ultérieurs deux ondes progressives d'amplitudes opposées,  $-g/2$  et  $+g/2$ , apparaissent sur la corde et se propagent en sens opposés (Fig. 2.8).

FIGURE 2.8 – Forme de la corde aux instants ultérieurs,  $t > 0$ .

Dans le cas général où la corde est déformée tout en ayant une vitesse initiale (donc  $f \neq 0$  et  $g \neq 0$ ) l'Éq. (2.58) montre que les ondes qui se propagent vers la droite et vers la gauche n'ont plus des propriétés de symétrie mutuelles.

Un autre cas particulier important est celui où une seule onde progressive est créée, se dirigeant par exemple vers les  $x$  croissants. Pour cela, il faudrait choisir la répartition initiale des vitesses de telle sorte que  $g(x) = -f(x)$ . L'évolution ultérieure de la corde sera donnée, d'après l'Éq. (2.58), par la fonction

$$u(t, x) = f(x - ct). \quad (2.61)$$

Dans d'autres problèmes, au lieu de se donner les conditions initiales sur la forme de la corde et sa vitesse, on impose un mouvement forcé à l'une de ses extrémités. Considérons une corde de longueur semi-infinie, dont l'une des extrémités a pour abscisse  $x = 0$ , le reste de la corde s'étendant vers les  $x$  positifs. On impose au point d'abscisse  $x = 0$  un mouvement forcé représenté par une fonction  $h(t)$ . On a ainsi la condition aux limites :

$$u(t, 0) = h(t). \quad (2.62)$$

Ce mouvement provoque sur la corde l'apparition d'une onde qui se propage vers les  $x$  croissants (Fig. 2.9). La longueur de la corde étant infinie, cette onde ne rencontre pas d'obstacle et n'est pas réfléchiée. Si aucune autre force extérieure n'est appliquée, on peut supposer que l'onde envoyée par le mouvement forcé (2.62) est la seule qui se propage sur la corde ; par conséquent, il n'y a pas d'onde qui se propage de l'infini vers  $x = 0$ .

En revenant à l'expression générale de la fonction  $u$ , Éq. (2.46), on en déduit que la fonction  $G$  est nulle :

$$u(t, x) = F(x - ct). \quad (2.63)$$



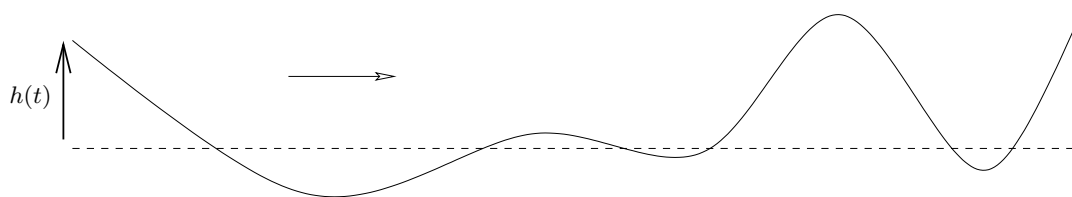


FIGURE 2.9 – Un mouvement forcé à l’une des extrémités de la corde crée une onde qui se propage sur le reste de la corde.

En prenant la limite  $x = 0$  et en tenant compte de la condition (2.62), on déduit :

$$F(-ct) = h(t), \quad (2.64)$$

ce qui nous permet de déterminer complètement la fonction  $u$  pour tout  $x$  et tout  $t$ . En effet, la dépendance en  $x$  étant contenue dans la combinaison  $(x - ct)$  ou ce qui est équivalent dans  $(t - x/c)$ , l’Éq. (2.64) donne :

$$u(t, x) = h(t - x/c). \quad (2.65)$$

A titre d’exemple, supposons que la fonction  $h$  soit une fonction oscillatoire :

$$h(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.66)$$

La fonction  $u$  prend alors, d’après l’Éq. (2.65), la forme

$$u(t, x) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right). \quad (2.67)$$

En posant  $k = \omega/c$  (cf. Éq. (1.17)), elle devient :

$$u(t, x) = A \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (2.68)$$

qui représente une onde plane sinusoïdale (cf. Sect. 1.5).

Lorsque la corde est de longueur finie, l’onde se propageant vers la droite rencontre l’autre extrémité et est réfléchiée et se propage vers la gauche. La corde est alors le siège de deux ondes progressives se propageant en sens opposés. L’analyse précédente doit alors tenir compte de la condition aux limites à l’autre extrémité et de la présence de l’onde réfléchiée. Supposons maintenant que la corde a une longueur  $L$ . La première extrémité, qui se trouve à l’abscisse  $x = 0$ , subit le mouvement forcé représenté par la fonction  $h(t)$ ,

Éq. (2.62). La deuxième extrémité, qui se trouve à l'abscisse  $x = L$ , est fixe ; elle satisfait donc à la condition (2.26) :

$$u(t, L) = 0. \quad (2.69)$$

La fonction  $u$  a la structure générale (2.46) et les deux conditions aux limites (2.62) et (2.69) s'écrivent en fonction des fonctions  $F$  et  $G$  :

$$F(-ct) + G(ct) = h(t), \quad (2.70)$$

$$F(L - ct) + G(L + ct) = 0. \quad (2.71)$$

La dernière équation étant valable quel que soit  $t$ , on peut y effectuer une translation de  $t$  de  $-L/c$  et obtenir :

$$G(ct) = -F(2L - ct), \quad (2.72)$$

ce qui nous permet d'éliminer  $G$  en fonction de  $F$  dans l'Éq. (2.70) :

$$F(-ct) - F(2L - ct) = h(t). \quad (2.73)$$

Cette équation détermine en principe  $F$  en fonction de  $h$  et, à partir de l'Éq. (2.72),  $G$  en fonction de  $h$ . Mais, contrairement à l'Éq. (2.64), sa résolution nécessite la connaissance explicite de  $h$ . Le plus souvent, la résolution ne peut se faire que numériquement. Mais dans certains cas simples une résolution analytique peut être obtenue.

Supposons de nouveau que la fonction  $h$  est une fonction oscillatoire, que nous représenterons cette fois en notation complexe (cf. Sect. 1.6) :

$$\tilde{h}(t) = Ae^{-i\omega t}, \quad (2.74)$$

où  $\omega$  est réel (pulsation) et  $A$  peut être complexe. Nous cherchons les fonctions  $F$  et  $G$  sous la forme d'ondes planes sinusoïdales complexes, ayant la même pulsation  $\omega$  que le mouvement forcé. Il s'agit d'une solution particulière qui est entièrement déterminée par le mouvement forcé. Lorsque le mouvement forcé disparaît ( $h(t) = 0$  pour tout  $t$ ), le mouvement sur la corde disparaît aussi et la corde reprend sa position d'équilibre. La solution générale du problème contient aussi des solutions indépendantes du mouvement forcé, qui apparaissent lorsqu'à l'état initial la corde a déjà une déformation ou une répartition de vitesses (cf. la discussion générale sur les conditions initiales au début de cette section). Les formes des fonctions  $F$  et  $G$  complexes sont ainsi :

$$\tilde{F}(x - ct) = Be^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.75)$$

$$\tilde{G}(x + ct) = Ce^{i(-kx - \omega t)}, \quad (2.76)$$

où les constantes  $B$  et  $C$  peuvent être complexes et le paramètre  $k$  est déterminé par la condition (1.17) :

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (2.77)$$

L'équation (2.71) s'écrit :

$$Be^{i(kL - \omega t)} + Ce^{i(-kL - \omega t)} = 0, \quad (2.78)$$

ce qui nous donne :

$$C = -Be^{2ikL}. \quad (2.79)$$

L'équation (2.70) s'écrit à l'aide du dernier résultat :

$$Be^{-i\omega t} - Be^{i(2kL - \omega t)} = Ae^{-i\omega t}. \quad (2.80)$$

En simplifiant par les exponentielles  $e^{-i\omega t}$ , on trouve :

$$B = A \frac{1}{1 - e^{2ikL}} = -A \frac{e^{-ikL}}{e^{ikL} - e^{-ikL}} = \frac{iA}{2 \sin(kL)} e^{-ikL}. \quad (2.81)$$

L'équation (2.79) donne  $C$  :

$$C = -\frac{iA}{2 \sin(kL)} e^{ikL}. \quad (2.82)$$

Les expressions de  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{G}$  et  $\tilde{u}$  sont alors complètement déterminées :

$$\tilde{F}(x - ct) = \frac{iA}{2 \sin(kL)} e^{i(k(x - L) - \omega t)}, \quad (2.83)$$

$$\tilde{G}(x + ct) = -\frac{iA}{2 \sin(kL)} e^{i(-k(x - L) - \omega t)}, \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x) &= \frac{iA}{2 \sin(kL)} \left( e^{i(k(x - L) - \omega t)} - e^{-i(k(x - L) - \omega t)} \right) e^{-i\omega t} \\ &= -\frac{A}{\sin(kL)} e^{-i\omega t} \sin(k(x - L)). \end{aligned} \quad (2.85)$$

On peut vérifier de nouveau avec l'expression finale de  $\tilde{u}$  que les deux conditions aux limites (2.62) et (2.69) sont bien satisfaites. On constate aussi que lorsqu'on a une superposition d'ondes progressives se propageant en sens opposés, l'expression globale de  $u$  peut ne pas faire apparaître une structure explicite d'ondes progressive. Ici,  $\tilde{u}$  s'est finalement exprimée comme le produit d'une fonction de  $t$  et d'une fonction de  $x$ .

On peut aussi revenir à l'expression réelle de  $u$  en précisant les parties réelle et imaginaire de l'amplitude  $A$ . On exprime celle-ci sous la forme d'un module multiplié par un facteur de phase :

$$A = |A| e^{i\varphi}. \quad (2.86)$$

La partie réelle de  $\tilde{u}$ , c'est-à-dire  $u$ , devient :

$$u = -\frac{|A|}{\sin(kL)} \cos(\omega t - \varphi) \sin(k(x - L)). \quad (2.87)$$

## 2.6 Réflexion

Lorsqu'une onde progressive rencontre un obstacle, par exemple le point de jonction entre deux cordes ou l'extrémité d'une corde, elle subit une réflexion partielle ou totale et donne naissance à une onde qui se propage en sens opposé. Les propriétés de cette onde sont déterminées en utilisant les conditions aux limites ou de raccordement au point considéré.

Supposons qu'une onde se propageant vers la gauche, donc du type  $G(x + ct)$ , se rapproche de l'extrémité fixe de la corde ayant pour abscisse  $x = 0$ . En ce point, on doit avoir  $u(t, 0) = 0$ . Or cette condition ne peut en général être satisfaite par la seule fonction  $G$ , qui devrait alors vérifier  $G(+ct) = 0$ . Comme l'instant d'arrivée en  $x = 0$  peut être arbitraire ou du moins appartenir à un intervalle fini (l'onde n'étant pas constituée d'un seul point), l'équation précédente ne pourra être satisfaite. Il est donc nécessaire qu'en  $x = 0$  apparaisse une onde se propageant vers la droite, donc du type  $F(x - ct)$ , représentant l'onde réfléchie, pour que la condition aux limites soit satisfaite. On aura dans ce cas :

$$F(-ct) + G(+ct) = 0, \quad (2.88)$$

soit

$$F(-ct) = -G(+ct), \quad (2.89)$$

ce qui montre que l'onde qui va se propager vers la droite après la réflexion aura une amplitude opposée en signe à celle de l'onde incidente ( $G$ ).

De même, une onde qui se propage vers la droite, donc du type  $F(x - ct)$ , arrivant à l'extrémité fixe de la corde ayant pour abscisse  $x = L$ , ne pourra seule satisfaire à la condition aux limites  $u(t, L) = 0$ . (Elle conduirait dans ce cas à l'équation  $F(L - ct) = 0$  pour  $t$  arbitraire ou du moins appartenant à un intervalle fini.) Par conséquent, à l'arrivée de l'onde  $F$  en  $x = L$ , une onde se propageant vers la gauche, donc du type  $G$ , représentant l'onde réfléchie, doit apparaître, pour que la condition aux limites soit satisfaite. On aura dans ce cas :

$$F(L - ct) + G(L + ct) = 0, \quad (2.90)$$

soit

$$G(L + ct) = -F(L - ct), \quad (2.91)$$

ce qui montre que l'onde qui va se propager vers la gauche après la réflexion aura une amplitude opposée en signe à celle de l'onde incidente.

Si une extrémité de la corde est libre, on peut montrer, à l'aide d'une analyse similaire à celle qu'on vient d'utiliser, que le phénomène de réflexion se manifeste sans changement de signe de l'amplitude de l'onde incidente. Considérons par exemple une onde qui se propage vers la gauche, donc du type  $G(x + ct)$ , et qui se rapproche de l'extrémité libre de la corde se trouvant à l'abscisse  $x = 0$ . L'onde réfléchie sera du type  $F(x - ct)$  et l'onde totale sera, d'après l'Éq. (2.46),  $u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct)$ . La condition aux limites est donnée par l'Éq. (2.23) :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial}{\partial x} (F(x - ct) + G(x + ct)) \right|_{x=0} = 0. \quad (2.92)$$

En utilisant les propriétés (2.47) vérifiées par les fonctions  $F$  et  $G$ , la condition aux limites devient :

$$\left[ -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F(x - ct) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} G(x + ct) \right]_{x=0} = 0. \quad (2.93)$$

Comme la dérivation agit maintenant sur  $t$ , on peut prendre dans les fonctions  $F$  et  $G$  la limite  $x = 0$ ; on obtient l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} (-F(-ct) + G(ct)) = 0, \quad (2.94)$$

dont la solution est :

$$F(-ct) = G(ct). \quad (2.95)$$

(La constante d'intégration dans cette solution est nulle, car en considérant des temps antérieurs au temps d'arrivée de l'onde incidente en  $x = 0$ , on doit avoir  $F = 0$ , car l'onde réfléchie ne sera pas non plus apparue.) On constate sur cette solution que l'amplitude de l'onde réfléchie a gardé le même signe que celui de l'amplitude de l'onde incidente.

Dans le cas où une onde progressive sur une corde 1 arrive au point de jonction de deux cordes, 1 et 2, elle donne naissance sur la corde 1 à une onde progressive réfléchie et sur la corde 2 à une onde progressive transmise qui se propage dans le même sens initial que celui de l'onde incidente venant de la corde 1. Dans ce cas, il faut utiliser les deux conditions de raccordement (2.19) et (2.22) pour déterminer les propriétés des ondes réfléchie et transmise.



# Chapitre 3

## Ondes stationnaires

### 3.1 Introduction

Lorsque la longueur d'une corde est finie, une onde progressive rencontre au bout d'un certain temps de propagation l'une des extrémités de la corde et donne naissance à une onde réfléchie qui se propage en sens inverse de l'onde initiale. L'onde réfléchie, en se propageant, rencontre l'autre extrémité de la corde et est à son tour réfléchie, etc. La corde devient ainsi le siège permanent d'ondes se propageant en sens inverses. Souvent, l'onde totale qui en résulte ne reflète plus des propriétés manifestes de propagation ; elle semble plutôt refléter un mouvement d'oscillation autour de la position d'équilibre de la corde. Un cas encore plus frappant apparaît lorsque l'onde paraît fixe avec tous les points de la corde oscillant avec la même pulsation  $\omega$ . De telles ondes sont appelées *ondes stationnaires*, le terme stationnaire indiquant le fait que l'onde reste fixe.

Les ondes stationnaires jouent un rôle important dans l'analyse du mouvement des ondes et permettent d'avoir une vue complémentaire à celle apportée par les ondes progressives. Ce chapitre est consacré à leur étude. Nous considérerons une corde ayant deux extrémités fixes. Les cas de cordes avec une ou deux extrémités libres se traitent de la même façon, en utilisant les conditions aux limites correspondantes.

### 3.2 Ondes stationnaires

Nous considérerons désormais dans le reste de ce chapitre une corde homogène de masse linéique uniforme  $\mu_0$  et de tension  $T_0$ , de longueur  $L$ , fixée à ses deux extrémités

d'abscisses respectives  $x = 0$  et  $x = L$ . La corde vérifie l'équation du mouvement (2.15)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

où la célérité  $c$  est définie par l'Éq. (2.14).

La fonction  $u$  vérifie en outre les deux conditions aux limites

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = 0, \quad (3.2)$$

pour tout  $t$ .

Nous adoptons, pour la recherche des solutions de l'équation du mouvement, la méthode appelée *méthode de la séparation des variables*. La fonction  $u$  est alors cherchée sous la forme d'un produit d'une fonction dépendant uniquement de  $t$  et d'une fonction dépendant uniquement de  $x$  :

$$u(t, x) = a(t)b(x). \quad (3.3)$$

Nous désignons par des points et des primes les dérivations des fonctions respectivement par rapport à  $t$  et à  $x$  :

$$\dot{a}(t) = \frac{da(t)}{dt}, \quad \ddot{a}(t) = \frac{d^2a(t)}{dt^2}, \quad b'(x) = \frac{db(x)}{dx}, \quad b''(x) = \frac{d^2b(x)}{dx^2}. \quad (3.4)$$

Les dérivations par rapport à  $t$  agissent uniquement sur  $a$  et celles par rapport à  $x$  uniquement sur  $b$ . L'équation (3.1) s'écrit :

$$\frac{1}{c^2} \ddot{a}b = ab''. \quad (3.5)$$

En divisant les deux membres par  $ab/c^2$ , on obtient :

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = c^2 \frac{b''(x)}{b(x)}. \quad (3.6)$$

Le premier membre de cette équation dépend uniquement de la variable  $t$  et le deuxième membre de la variable  $x$ . Comme ces deux variables sont indépendantes, l'égalité ne peut avoir lieu que si chaque membre est une constante :

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = c^2 \frac{b''(x)}{b(x)} = C = \text{constante}. \quad (3.7)$$

Le signe de cette constante est arbitraire. Cependant, on constate au cours des calculs que seul le signe négatif est compatible avec les deux conditions aux limites (3.2). Nous adoptons dès maintenant ce résultat, en posant

$$C = -\omega^2, \quad (3.8)$$



où  $\omega$  est une constante réelle, qu'on choisira positive dans la suite. L'équation (3.7) s'écrit :

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = c^2 \frac{b''(x)}{b(x)} = -\omega^2. \quad (3.9)$$

L'équation satisfaite par la fonction  $a$  devient :

$$\ddot{a}(t) = -\omega^2 a(t). \quad (3.10)$$

Avant de résoudre cette équation, notons le fait que si on la multiplie (dans les deux membres) par  $b(x)$  et qu'on réutilise la définition  $u = ab$  [Éq. (3.3)] on obtient une équation satisfaite par  $u$  qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u. \quad (3.11)$$

Il apparaît ainsi que  $\omega^2$  est la *valeur propre* de l'opérateur  $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$  et que la fonction  $u(t, x)$  en est la *fonction propre*. [Une dénomination analogue se rencontre aussi dans le cas des matrices. Si  $M$  est une matrice carrée et  $X$  une matrice colonne, l'équation  $MX = \lambda X$ , où  $\lambda$  est une constante, est appelée équation aux valeurs propres ;  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $M$  et  $X$  en est le vecteur propre.] L'équation (3.11) est l'une des conditions nécessaires de la définition mathématique des ondes stationnaires.

La solution de l'Éq. (3.10) se trouve facilement ; il s'agit des fonctions oscillatoires cosinus et sinus. On peut écrire sa solution générale sous la forme

$$a(t) = a_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.12)$$

faisant intervenir deux constantes arbitraires  $a_0$  et  $\varphi$ . [Une équation différentielle de deuxième ordre et à une variable fait intervenir deux constantes arbitraires dans sa solution générale.]

L'équation satisfaite par la fonction  $b$  est, d'après l'Éq. (3.9),

$$b''(x) = -\frac{\omega^2}{c^2} b(x). \quad (3.13)$$

En posant

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad (3.14)$$

l'équation précédente devient :

$$b''(x) = -k^2 b(x). \quad (3.15)$$

Elle est du même type que l'Éq. (3.10). Nous écrivons sa solution (qui fait aussi intervenir deux constantes arbitraires) sous la forme suivante :

$$b(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad (3.16)$$

$A$  et  $B$  étant des constantes. Comme on le verra plus bas, cette forme, plutôt que la forme (3.12), est plus utile pour l'étude des conditions aux limites, qui concernent la variable  $x$ . La fonction  $u$ , Éq. (3.3), devient :

$$u(t, x) = \left( A \sin(kx) + B \cos(kx) \right) \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.17)$$

Comme la constante inconnue  $a_0$  de la fonction  $a(t)$  multiplie dans l'expression de  $u$  une autre constante inconnue,  $A$  ou  $B$ , nous l'avons incorporée dans la définition des constantes  $A$  et  $B$ .

La fonction  $u$  est ainsi une fonction oscillatoire dans le temps, avec une pulsation  $\omega$  et une période  $T = 2\pi/\omega$ .

Nous devons maintenant imposer les conditions aux limites (3.2) qui sont valables pour tout  $t$ . La condition

$$u(t, 0) = 0 \quad (3.18)$$

implique :

$$B = 0. \quad (3.19)$$

La condition

$$u(t, L) = 0 \quad (3.20)$$

implique :

$$A \sin(kL) = 0. \quad (3.21)$$

La solution  $A = 0$  ne peut-être retenue, car alors la fonction  $u$  serait nulle. C'est donc la solution  $\sin(kL) = 0$  qu'il faut retenir, ce qui implique :

$$k = k_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

$k$  prend ainsi une infinité dénombrable de valeurs. (Les valeurs négatives de  $m$  ne donnent pas de fonctions nouvelles et changent tout simplement  $A$  en  $-A$ .) En distinguant par un indice  $m$  les solutions correspondant à des valeurs différentes de  $k$ , les fonctions  $u(t, x)$  s'écrivent :

$$u_m(t, x) = A_m \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(\omega_m t + \varphi_m), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.23)$$

où  $A_m$  est une constante et où le facteur multiplicatif  $\sqrt{2/L}$  a été explicité pour des raisons de normalisation qui seront évidentes dans la Sect. 3.3. En développant dans l'expression (3.23) la fonction  $\cos(\omega_m t + \varphi_m)$  et en définissant des constantes  $C_m$  et  $D_m$  par  $C_m = A_m \cos \varphi_m$ ,  $D_m = -A_m \sin \varphi_m$ , on obtient une autre expression équivalente de  $u_m(t, x)$  :

$$u_m(t, x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) (C_m \cos \omega_m t + D_m \sin \omega_m t), \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

Nous trouvons ainsi une infinité dénombrable d'ondes stationnaires.

Les valeurs possibles de  $\omega$  sont déterminées à partir des Éqs. (3.14) et (3.22) :

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{L}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

Pour les périodes, nous avons les résultats :

$$T_m = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2L}{mc}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

D'après la propriété de linéarité de l'Éq. (3.1), sa solution générale est donnée par la superposition de toutes les solutions indépendantes. La solution générale prend la forme :

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) (C_m \cos \omega_m t + D_m \sin \omega_m t). \quad (3.27)$$

La constante  $k$  est appelée *nombre d'onde* (ou *vecteur d'onde* dans le cas tridimensionnel) et la relation entre la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$ , Éq. (3.14), *relation de dispersion*. Pour la corde homogène considérée elle prend la forme de l'Éq. (3.14), mais pour des milieux inhomogènes elle prend une forme plus générale qu'on pourrait représenter par l'équation

$$\omega = F(k), \quad (3.28)$$

où  $F$  est une fonction dépendant des caractéristiques du milieu. Par exemple, pour une corde de piano, on a la relation empirique :

$$\omega = \sqrt{c^2 k^2 + \alpha k^4}, \quad (3.29)$$

où le deuxième terme sous la racine est beaucoup plus faible que le premier et joue un rôle correctif.

Les fonctions  $u_m(t, x)$  [Éq. (3.24)] possèdent certaines propriétés particulières. Chaque fonction  $u_m$  représente un mouvement oscillatoire avec une pulsation bien définie  $\omega_m$ . Par

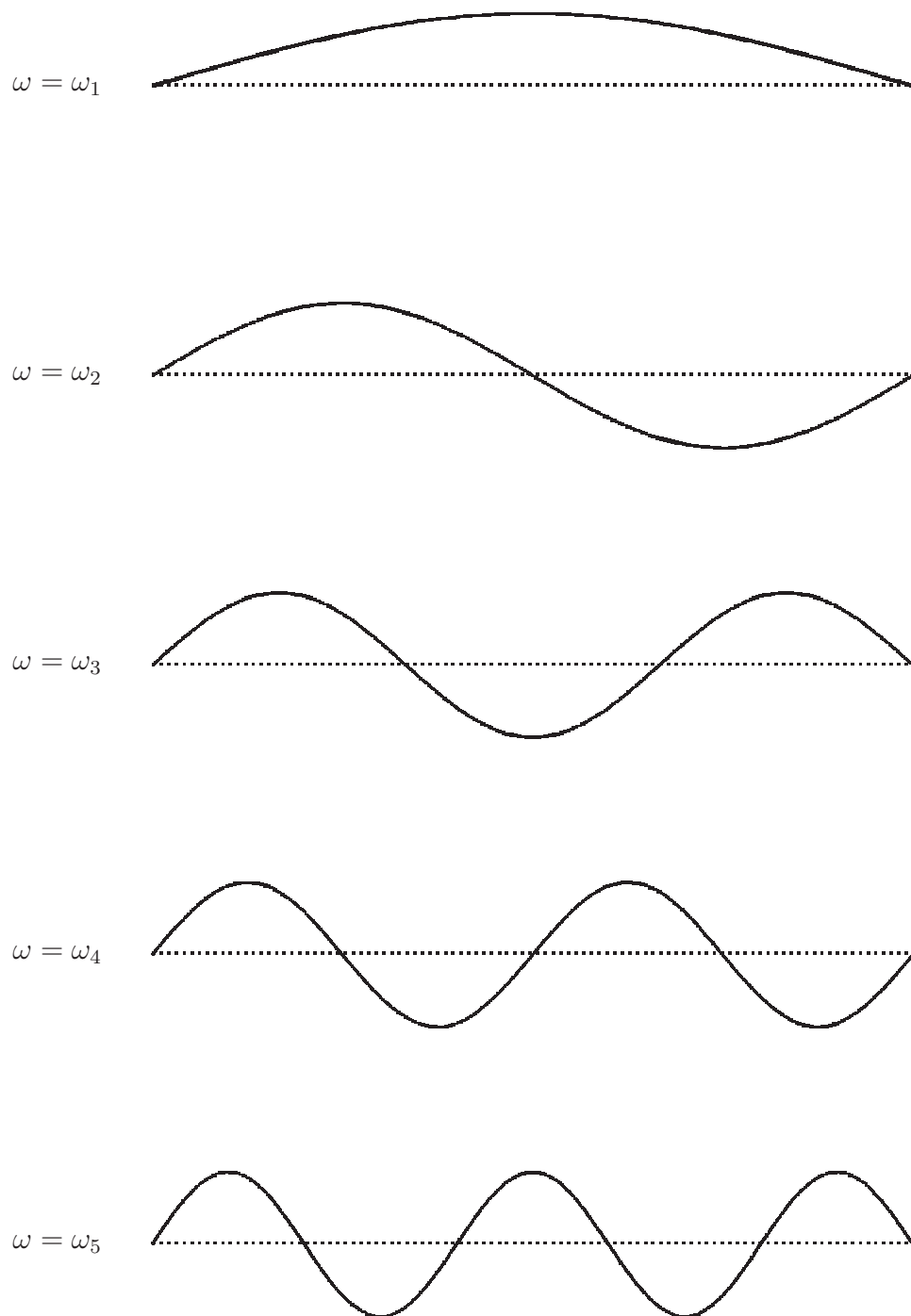


FIGURE 3.1 – Les configurations de la corde, à un instant donné, pour les cinq premiers modes normaux.

analogie avec le cas des systèmes oscillant avec un nombre fini de degrés de liberté, ces solutions sont aussi appelées *modes normaux*. Pour un mode normal donné, tous les points de la corde oscillent ou vibrent avec la même pulsation  $\omega_m$ . Le rapport des amplitudes de vibration en deux points différents de la corde reste constant au cours du temps. Ainsi, si  $x_1$  et  $x_2$  représentent les abscisses de deux points différents de la corde, on a, d'après l'Éq. (3.24),  $u_m(t, x_2)/u_m(t, x_1) = \sin(\frac{m\pi x_2}{L})/\sin(\frac{m\pi x_1}{L})$ , qui est indépendant du temps. La fonction  $u_m(t, x)$  a  $(m - 1)$  points fixes sur l'axe des  $x$  dans l'intervalle  $[0, L]$ , appelés *nœuds*, dont les positions sont données par les zéros de la fonction  $\sin(\frac{m\pi x}{L})$ ; les abscisses correspondantes sont  $x_p^{(m)} = \frac{pL}{m}$ ,  $p = 1, \dots, m - 1$  ( $m > 1$ ). Toujours sur le même intervalle, les fonctions  $u_m(t, x)$  sont paires (impaires) pour  $m$  impair (pair) sous l'opération de réflexion par rapport à l'axe d'équation  $x = L/2$ , passant par le milieu de l'intervalle  $[0, L]$ .

Ces propriétés relatives aux nœuds nous permettent de donner une définition plus restrictive des ondes stationnaires. *Les ondes stationnaires sont les solutions de l'équation du mouvement des cordes, ayant une pulsation bien définie (solutions de l'Éq. (3.11)) et des points fixes sur l'axe de la corde (les nœuds et éventuellement les extrémités de la corde). Lorsque la corde n'est pas soumise à un mouvement forcé, les pulsations des ondes stationnaires ne peuvent prendre que des valeurs discrètes (Éq. (3.25) ou équations similaires selon les conditions aux limites).* Notons qu'une superposition de plusieurs ondes stationnaires (comme dans l'Éq. (3.27)) n'est plus une onde stationnaire, puisqu'une telle onde ne possède plus une valeur bien définie de la pulsation (autrement dit, n'est plus solution de l'Éq. (3.11)).

Cette définition restrictive nous permet de ne pas considérer comme stationnaires les ondes qui tout en ayant une pulsation bien définie (solutions de l'Éq. (3.11)) ne possèdent pas de points fixes. Nous avons déjà vu [Sect. 1.5] que de telles ondes existent; ce sont les ondes planes sinusoïdales (progressives). Les ondes planes sinusoïdales, tout en ayant une valeur bien définie de la pulsation (donc elles sont solutions de l'Éq. (3.11)), ne possèdent pas de points fixes, comme d'ailleurs l'ensemble des ondes progressives qui se dirigent dans un seul sens (cf. Sect. 1.3). En effet, la fonction  $u(t, x) = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$ , avec  $k = \omega/c$ , qui représente une onde plane sinusoïdale, ne peut s'annuler que si l'argument de la fonction cosinus est un multiple impair de  $\pi/2$ , soit par exemple  $kx - \omega t + \varphi = (2p + 1)\pi/2$ ,  $p = 0, 1, \dots$ . Ceci implique que la valeur correspondante de

$x$  est  $x = [\omega t - \varphi + (2p + 1)\pi/2]/k$ ; la position du zéro de  $u$  se déplace donc au cours du temps et ne correspond pas à un point fixe. D'après la définition restrictive des ondes stationnaires que nous avons adoptée plus haut, les ondes planes sinusoïdales ne seront pas considérées comme stationnaires. Mais des superpositions particulières d'ondes planes sinusoïdales se propageant en sens inverses peuvent avoir des points fixes et créer ainsi des ondes stationnaires (cf. début Sect. 3.5).

On a représenté sur la Fig. 3.1 les fonctions  $u_m$  pour les cinq premiers modes normaux, à un instant  $t$  donné. On y vérifie les propriétés mentionnées ci-dessus.

On a représenté respectivement sur les Figs. (3.2) et (3.3) l'évolution de la configuration de la corde, lâchée sans vitesse initiale, pour les deux premiers modes normaux, pendant une demi-période. Pendant la demi-période restante, la corde reprend, dans l'ordre inverse, ses formes précédentes, pour retrouver après une période sa forme initiale.

Les pulsations (3.25) des ondes stationnaires étant toutes multiples entières de la première pulsation  $\omega_1$ , appelée aussi le mode normal *fondamental* ( $\omega_m/\omega_1 = m$ ), il s'ensuit que la solution générale  $u(t, x)$  [Éq. (3.27)] est en général une fonction périodique du temps de période  $T = T_1 = 2L/c$ . Si les coefficients  $C_1$  et  $D_1$  sont tous les deux nuls, la période sera de  $2L/(2c)$ , qui en tout cas est contenue dans la période précédente, et ainsi de suite. Pour une corde de tension  $T_0 = 50$  N et de masse linéique  $\mu_0 = 50$  g m<sup>-1</sup>, nous avons trouvé (cf. Éq. (2.14) et suite)  $c = 31,7$  m s<sup>-1</sup>. Si la corde a une longueur  $L = 1$  m, la période du mouvement est  $T = 0,063$  s et la fréquence  $\nu = 15,9$  Hz. La pulsation du mode fondamental est  $\omega_1 = \pi c/L = 99,5$  rad s<sup>-1</sup>.

Pour fixer complètement la solution générale  $u(t, x)$  [Éq. (3.27)], il est nécessaire d'imposer les conditions initiales à l'instant  $t = 0$ . Supposons que la corde à l'instant initial ait une forme donnée par une courbe  $f(x)$ , vérifiant les conditions aux limites  $f(0) = f(L) = 0$ . On aura :

$$u(0, x) = f(x). \quad (3.30)$$

(Voir aussi l'Éq. (2.48).) Supposons aussi que les vitesses initiales (divisées par  $c$ ) des points de la corde soient données par une fonction de  $x$  qu'on notera par  $g'(x) = \frac{dg}{dx}$ . La condition initiale des vitesses s'écrit alors :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \Big|_{t=0} = g'(x). \quad (3.31)$$

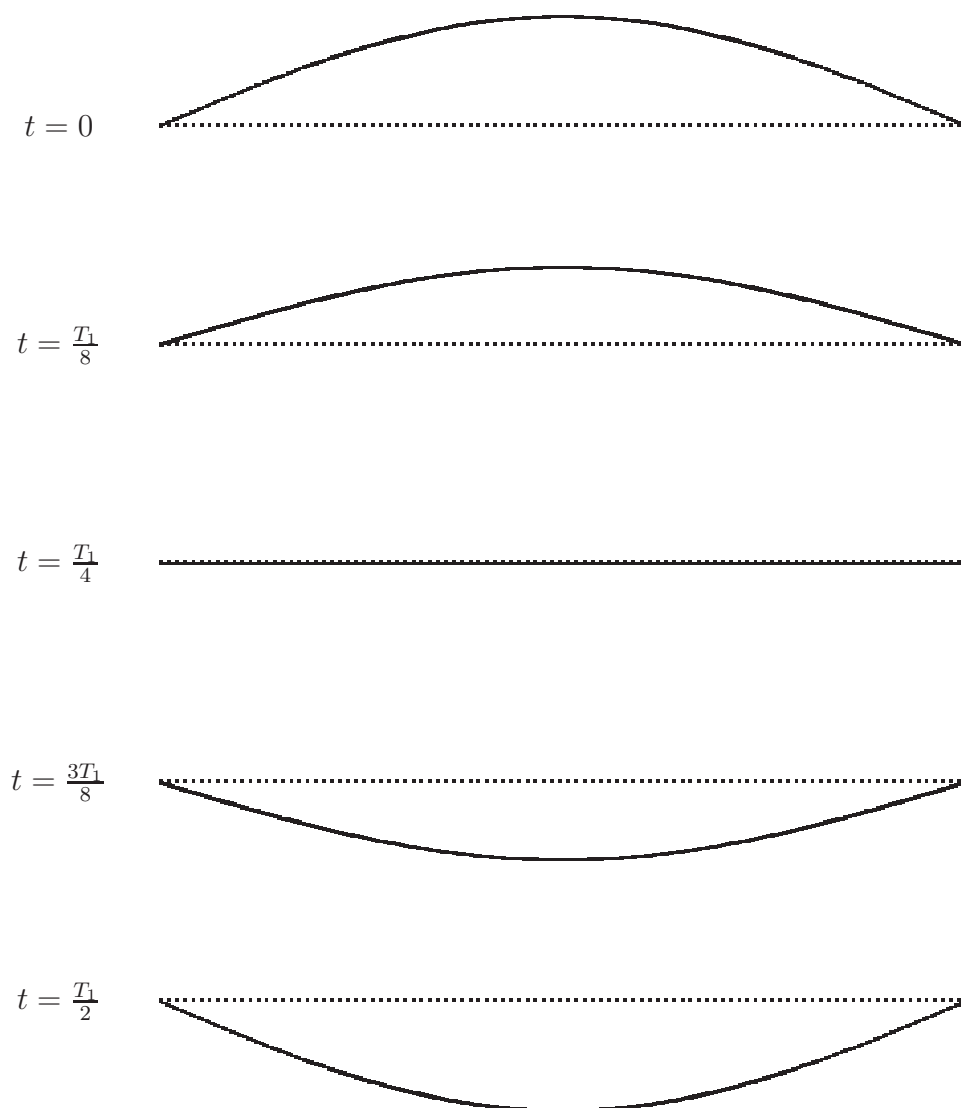


FIGURE 3.2 – L'évolution de la configuration de la corde, lâchée sans vitesse initiale, dans le cas du premier mode normal (ou mode fondamental), pendant une demi-période  $T_1/2$ .

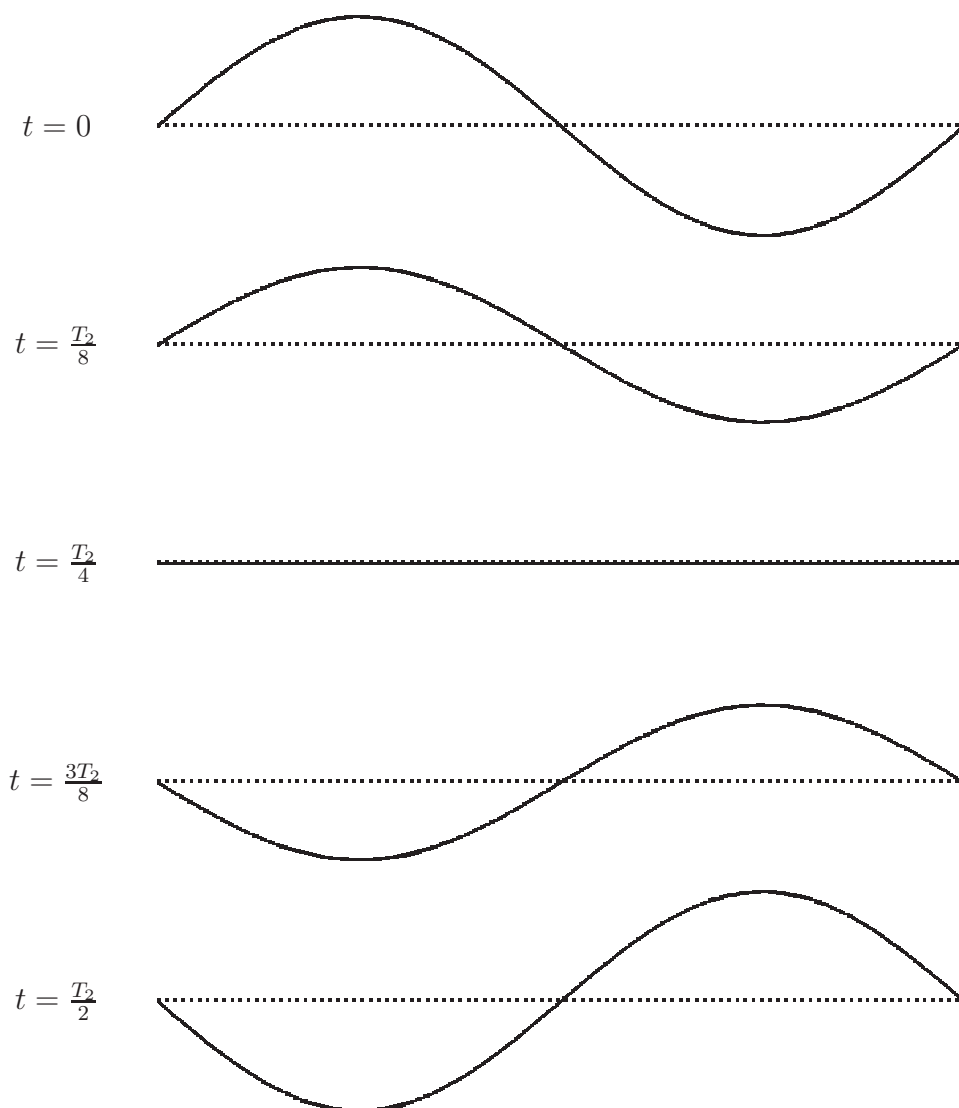


FIGURE 3.3 – L'évolution de la configuration de la corde, lâchée sans vitesse initiale, dans le cas du deuxième mode normal, pendant une demi-période  $T_2/2$ .



(Voir aussi l'Éq. (2.50).) En utilisant le développement (3.27) on trouve :

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \quad (3.32)$$

$$g'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{m\pi}{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.33)$$

Les conditions initiales se sont traduites, dans le cas de la représentation de la solution générale par des ondes stationnaires, par deux équations dépendant de  $x$  et faisant intervenir une infinité de constantes  $C_m$  et  $D_m$  [Éqs. (3.32)-(3.33)]. Est-il possible de déterminer toutes ces constantes à partir de ces deux équations ?

La réponse à cette question est positive. Elle découle de la propriété fondamentale des ondes stationnaires (ou des modes normaux) de former, concernant leur dépendance en  $x$ , une base complète de fonctions dans l'intervalle  $[0, L]$ . Nous étudierons cette question dans la section suivante.

### 3.3 Base complète d'ondes stationnaires

La notion de base complète de fonctions est une généralisation naturelle d'une propriété bien connue des vecteurs dans l'espace tridimensionnel des coordonnées ou des positions des points. Dans cet espace, on choisit usuellement des axes orthogonaux  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  et des vecteurs unitaires  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  respectivement sur ces axes. Par l'intermédiaire du produit scalaire des vecteurs, ceux-ci vérifient les relations :

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0, \quad \mathbf{e}_x^2 = \mathbf{e}_y^2 = \mathbf{e}_z^2 = 1. \quad (3.34)$$

Ces vecteurs définissent une base orthonormée complète pour les vecteurs de l'espace. Ainsi tout vecteur  $\mathbf{V}$  est décomposable sur cette base :

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y + V_z \mathbf{e}_z. \quad (3.35)$$

Les composantes  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  sont calculables à l'aide du produit scalaire de  $\mathbf{V}$  avec les vecteurs de base et les relations (3.34) :

$$V_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{V}, \quad V_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{V}, \quad V_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{V}. \quad (3.36)$$

Ces propriétés se généralisent à d'autres espaces vectoriels. Ainsi, les fonctions continues dans un intervalle fini (ici l'intervalle  $[0, L]$ ) forment un espace vectoriel de dimension

infinie. Il est possible de trouver une base de fonctions élémentaires sur laquelle toute fonction continue est décomposable. Pour cela, il est d'abord nécessaire de définir le produit scalaire dans l'espace des fonctions. Le produit scalaire de deux fonctions réelles  $f$  et  $g$ , continues sur l'intervalle  $[0, L]$  ou ayant des discontinuités finies en un nombre fini de points, noté par  $(f, g)$ , sera défini comme étant égal à l'intégrale sur l'intervalle  $[0, L]$  de leur produit usuel. Ainsi :

$$(f, g) = \int_0^L dx f(x) g(x). \quad (3.37)$$

Comme nous étudions actuellement le problème de la corde fixée à ses deux extrémités, nous considérerons uniquement les fonctions qui vérifient ces conditions aux limites ; ainsi  $f(0) = f(L) = 0$ . Suivant les conditions aux limites du problème, les conditions satisfaites par les fonctions  $f$  peuvent être modifiées. Nous désignons par  $f_m(x)$  la partie spatiale (dépendant uniquement de  $x$ ) de l'onde stationnaire  $u_m(t, x)$  [Éq. (3.24)] :

$$f_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (3.38)$$

Vérifions maintenant que deux ondes stationnaires différentes ( $n \neq m$ ) sont orthogonales relativement au produit scalaire (3.37) :

$$\begin{aligned} (f_n, f_m) &= \int_0^L dx f_n(x) f_m(x) \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \\ &= \frac{2}{2L} \int_0^L dx \left[ \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[ \frac{L}{(n-m)\pi} \sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) \Big|_0^L - \frac{L}{(n+m)\pi} \sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \Big|_0^L \right] \\ &= 0 \quad (n \neq m). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Les fonctions (3.38) sont aussi normées à 1 :

$$\begin{aligned} (f_n, f_n) &= \int_0^L dx f_n^2(x) \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{2}{2L} \int_0^L dx \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right) \\ &= \frac{1}{L} \left[ x \Big|_0^L - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L \right] \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Les résultats (3.39) et (3.40) peuvent être regroupés par l'intermédiaire du symbole de Kronecker  $\delta_{nm}$  défini comme suit :

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \quad (3.41)$$

On a alors :

$$(f_n, f_m) = \delta_{nm}. \quad (3.42)$$

Ces équations sont les analogues des Éqs. (3.34) et traduisent le fait que les ondes stationnaires  $f_n$  forment une base orthonormée. Pour que cette base soit complète, il est nécessaire de montrer que toute fonction arbitraire définie dans l'intervalle  $[0, L]$  (continue ou ayant au plus des discontinuités finies en un nombre fini de points et vérifiant les conditions aux limites) est décomposable sur cette base. Cette propriété est assurée par les conditions initiales (3.32)-(3.33), elles-mêmes étant des conséquences du fait que la série (3.27) des modes normaux représente la solution générale de l'équation du mouvement (3.1). Les Éqs. (3.32)-(3.33) peuvent être réécrites à l'aide des fonctions  $f_n$  [Éq. (3.38)] :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(x), \quad (3.43)$$

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} D_n f_n(x). \quad (3.44)$$

Comme les conditions initiales de la solution générale de l'Éq. (3.1) peuvent être choisies arbitrairement, ces équations montrent que des fonctions arbitraires sont décomposables sur la base constituée des fonctions propres  $f_n$ . Cette base est donc complète.

La détermination des coefficients  $C_m$  et  $D_m$  se fait à l'aide du produit scalaire des fonctions  $f$  et  $g'$  avec les fonctions  $f_m$  (analogie avec les projections dans les Éqs. (3.36)) :

$$C_m = (f_m, f) = \int_0^L dx f_m(x) f(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L dx \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) f(x), \quad (3.45)$$

$$\frac{m\pi}{L} D_m = (f_m, g') = \int_0^L dx f_m(x) g'(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L dx \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) g'(x). \quad (3.46)$$

Ces résultats peuvent être vérifiés en remplaçant dans les seconds membres  $f$  et  $g'$  par leurs développements (3.43)-(3.44) et en utilisant ensuite les propriétés d'orthonormalité (3.42).

[Une démonstration indépendante établissant que la base des fonctions propres  $f_n$  est complète peut aussi être obtenue à partir des théorèmes utilisés dans l'étude des séries

de Fourier. En utilisant des généralisations de l'intégrale de Dirichlet  $\int_a^b dx f(x) \frac{\sin(\lambda x)}{x}$ , on montre que la fonction  $f_N(x) \equiv \sum_{n=1}^N C_n f_n(x)$ , où  $C_n$  est calculé par l'Éq. (3.45), tend vers la fonction  $f(x)$  lorsque  $N$  tend vers l'infini.]

Les valeurs des divers coefficients  $C_n$  et  $D_n$  vont dépendre de la forme des fonctions  $f$  et  $g'$ . Le coefficient  $C_n$  (ou  $D_n$ ) le plus important sera celui correspondant à la fonction  $f_n$  ayant la forme la plus proche de la fonction  $f$  (ou  $g'$ ). Par exemple, si la fonction  $f$  n'a aucun nœud, c'est le coefficient  $C_1$  qui en général sera le plus important, suivi de ses voisins. Si la fonction  $f$  a  $p - 1$  nœuds, c'est le coefficient  $C_p$  qui sera en général le plus important, etc.

Il est aussi important de connaître le comportement asymptotique des coefficients  $C_n$  et  $D_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Généralement, ces coefficients doivent tendre vers zéro dans cette limite. En effet, d'après le fait que les fonctions  $f$  et  $g'$  sont bornées sur l'intervalle  $[0, L]$ , on déduit que leur norme (racine carrée du produit scalaire d'une fonction avec elle-même) est finie. On a ainsi d'après les Éqs. (3.43)-(3.44) et (3.42) :

$$(f, f) = \int_0^L dx f^2(x) = \sum_{m,n} C_m C_n (f_m, f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2, \quad (3.47)$$

$$(g', g') = \int_0^L dx g'^2(x) = \sum_{m,n} \left(\frac{m\pi}{L}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right) D_m D_n (f_m, f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 D_n^2. \quad (3.48)$$

Ces relations montrent que  $C_n$  et  $D_n$  doivent se comporter pour  $n$  grand respectivement comme  $n^{-s}$  et  $n^{-s'-1}$ , avec  $s, s' > 1/2$ . En utilisant des majorations des fonctions  $f$  et  $g'$  et éventuellement de leurs dérivées, on peut montrer les résultats plus précis suivants sur les valeurs possibles de  $s$  et de  $s'$ . Si la fonction  $f$  est continue (dans l'intervalle  $[0, L]$ ) avec une dérivée discontinue (discontinuité finie en un nombre fini de points),  $s = 2$ . Si la fonction  $f$  et sa dérivée sont continues,  $s = 3$ . Contrairement à  $f$ , la fonction  $g'$ , reliée à la vitesse initiale de la corde, peut être discontinue. Par exemple, elle peut-être nulle sur un intervalle et différente de zéro sur un autre. Si la fonction  $g'$  est discontinue,  $s' = 1$ . Si  $g'$  est continue avec une dérivée discontinue,  $s' = 2$ . Si  $g'$  et sa dérivée sont continues,  $s' = 3$ .

Lorsque les coefficients  $C_n$  et  $D_n$  ont été déterminés à partir des Éqs. (3.45)-(3.46), on les remplace dans l'expansion (3.27) de la solution générale et on peut alors étudier l'évolution de la corde au cours du temps. Toutefois, un problème d'ordre pratique se pose à ce niveau. La série (3.27) ayant en général un nombre infini de termes, il n'est pas possible en pratique de sommer tous ces termes. Mais les résultats obtenus plus haut sur

les comportements asymptotiques des coefficients nous permettent de tronquer la série à partir d'un ordre fini sans commettre une grande erreur. L'ordre, à partir duquel on peut tronquer la série dépend de la forme des fonctions  $f(x)$  et  $g'(x)$ . Un test graphique de reproduction de ces fonctions donne des indications sur l'ordre correspondant.

Dans la section suivante, nous considérerons quelques exemples illustrant ces diverses propriétés.

## 3.4 Exemples

### 3.4.1 Exemple 1

On considère une corde lâchée sans vitesse initiale,

$$g'(x) = 0, \quad (3.49)$$

et ayant à l'instant initial une forme décrite par la fonction

$$f(x) = \frac{4h}{L^2}x(L-x), \quad (3.50)$$

le coefficient multiplicatif étant fixé de telle façon que la hauteur maximale de la corde soit égale à  $h$  (Fig. 3.4).

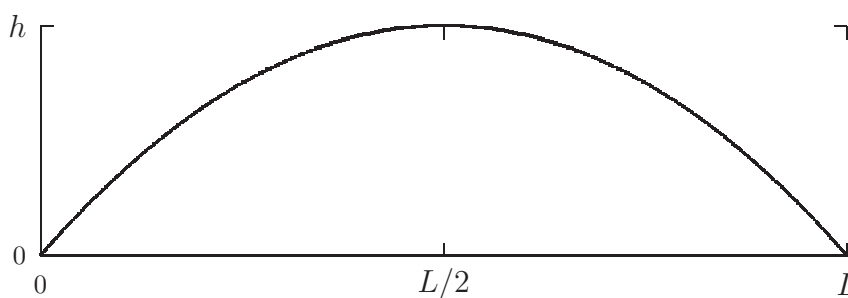


FIGURE 3.4 – La forme de la corde à l'instant initial (exemple 1).

La fonction  $g'$  étant nulle, les coefficients  $D_n$  [Éq. (3.46)] le sont aussi :

$$D_n = 0. \quad (3.51)$$

La fonction  $f$  est continue ainsi que sa dérivée. On doit s'attendre à un comportement asymptotique en  $1/n^3$  des coefficients  $C_n$ . Pour ceux-ci, nous avons [Éq. (3.45)] :

$$C_n = \frac{4h}{L^2} \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L dx x(L-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.52)$$

Le calcul se fait par intégration par parties. On trouve :

$$C_n = -\frac{8h}{L^2} \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 ((-1)^n - 1). \quad (3.53)$$

On remarque que les coefficients d'indice pair sont nuls. Ceci était prévisible, car la fonction  $f$  est paire par rapport au milieu de la corde (l'axe d'équation  $x = L/2$ ) ; dans ce cas, seuls les modes normaux pairs (indice impair) peuvent contribuer à son développement en série. En définissant

$$n = 2p + 1, \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.54)$$

on peut réécrire :

$$C_{2p+1} = \frac{16hL}{\pi^3} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{(2p+1)^3}, \quad C_{2p+2} = 0. \quad (3.55)$$

Le développement en série de la fonction  $f$  devient [Éqs. (3.43) et (3.38)] :

$$f(x) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^3} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi x}{L}\right). \quad (3.56)$$

La solution de l'équation du mouvement de la corde est donnée par la formule (3.27), qui prend la forme :

$$u(t, x) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^3} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{(2p+1)\pi ct}{L}\right). \quad (3.57)$$

Nous avons représenté sur la Fig. 3.5 l'évolution de la corde durant une demi période  $T_1/2$ , obtenue avec les trois premières fonctions propres. La forme initiale (3.50) étant très proche de celle relative au mode fondamental (Fig. 3.1), son évolution au cours du temps reste aussi similaire à l'évolution correspondante donnée sur la Fig. 3.2.

### 3.4.2 Exemple 2

La corde est lâchée sans vitesse initiale,

$$g'(x) = 0, \quad (3.58)$$

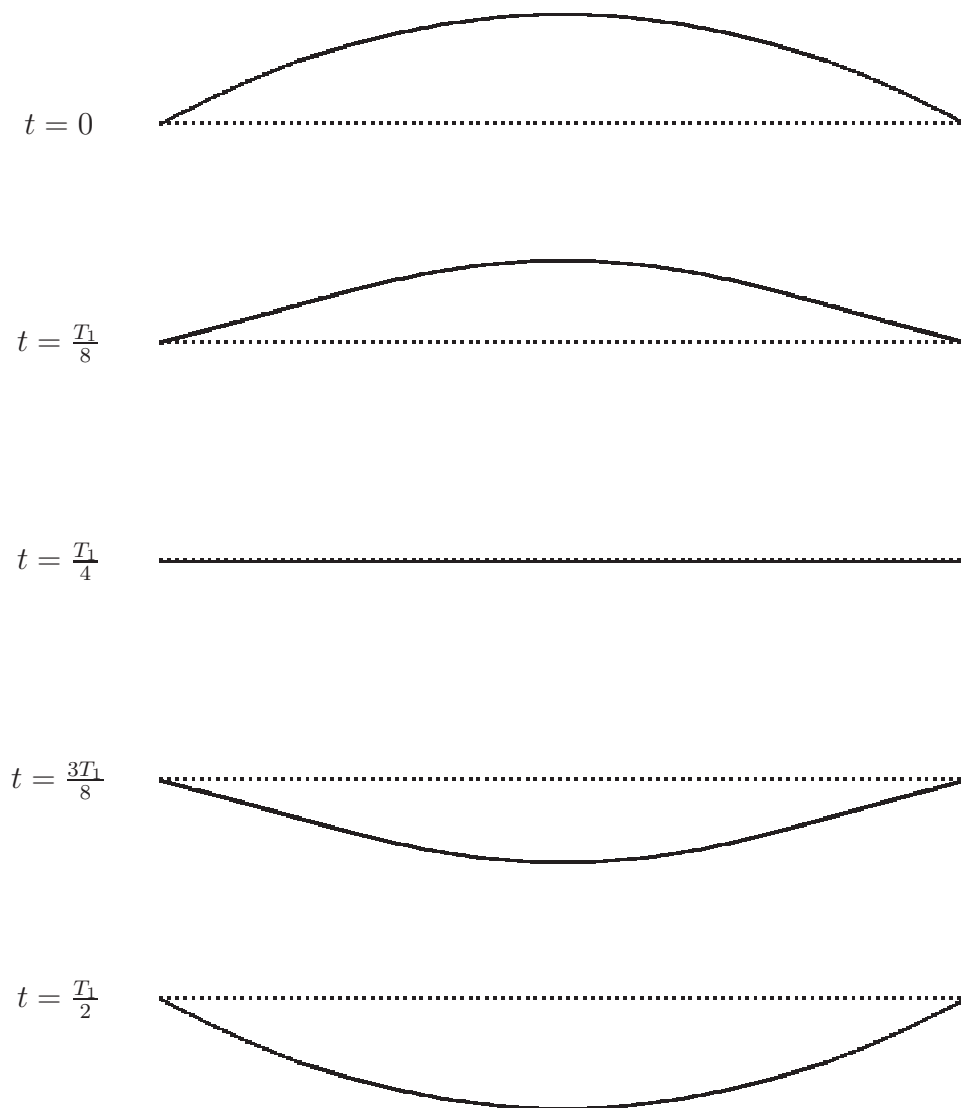


FIGURE 3.5 – Évolution de la corde au cours d'une demi-période (exemple 1).

et sa forme initiale est décrite par la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2h}{L}x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ \frac{2h}{L}(L-x), & \frac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3.59)$$

Elle est représentée sur la Fig. 3.6 (corde pincée en son milieu).

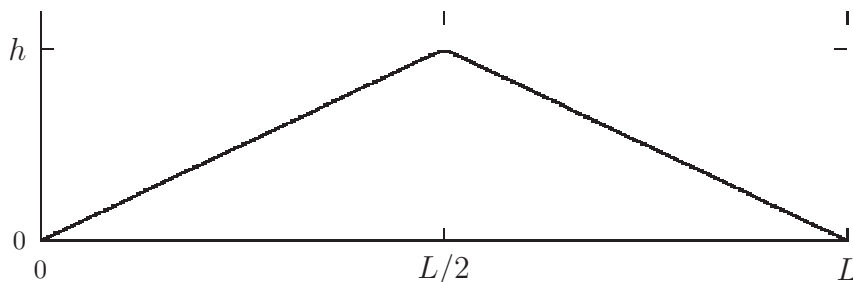


FIGURE 3.6 – La forme de la corde à l’instant initial (exemple 2).

La fonction  $f$  est continue, mais sa dérivée est discontinue au point  $x = L/2$ . Par conséquent le comportement asymptotique des coefficients  $C_n$  sera en  $1/n^2$ . D’autre part,  $f$  étant une fonction paire par rapport au milieu de la corde, les coefficients  $C_n$  d’indice pair seront nuls. La nullité de  $g'$  entraîne celle des coefficients  $D_n$  :

$$D_n = 0. \quad (3.60)$$

Pour les coefficients  $C_n$ , en effectuant le changement de notation  $n = 2p + 1$ ,  $p = 0, 1, \dots$ , on trouve :

$$C_{2p+1} = \frac{4hL}{\pi^2} \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}, \quad C_{2p+2} = 0. \quad (3.61)$$

La fonction  $u(t, x)$  [Éq. (3.27)] est donnée par la relation :

$$u(t, x) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin\left(\frac{(2p+1)\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{(2p+1)\pi ct}{L}\right). \quad (3.62)$$

L’évolution de la corde est décrite, à l’aide des douze premières fonctions propres, sur la Fig. 3.7, pendant une demi-période.

### 3.4.3 Exemple 3

Dans les deux exemples précédents, nous avons considéré des formes initiales de la corde qui étaient assez proches de celle d’une onde stationnaire (ici, le mode normal



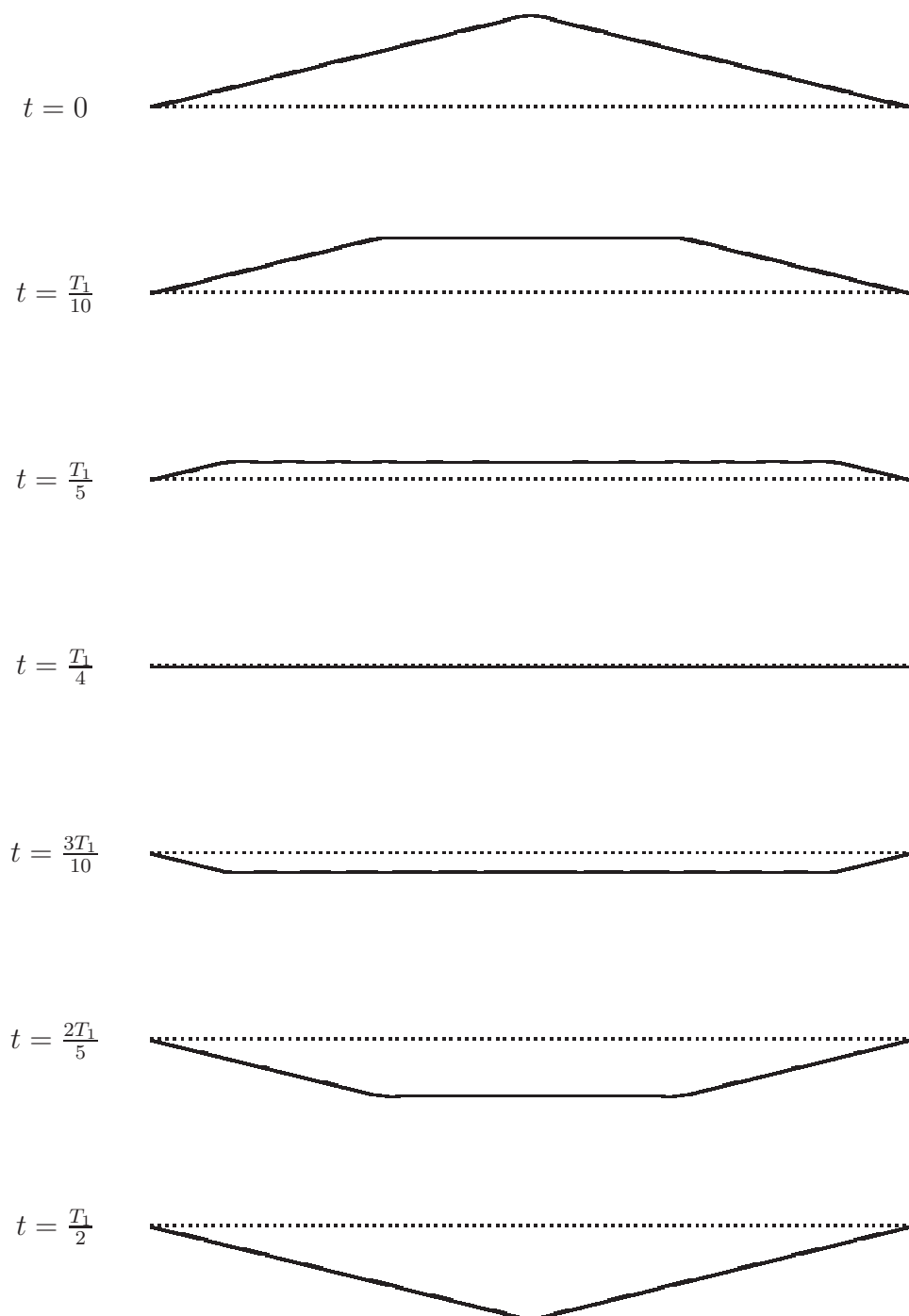


FIGURE 3.7 – Évolution de la corde, lâchée sans vitesse initiale, pendant une demi-période  $T_1/2$  (exemple 2).

fondamental) et l'évolution ultérieure restait dominée par celle-ci. Dans cet exemple nous considérons une déformation initiale de la corde localisée sur un intervalle beaucoup plus petit que la longueur  $L$ . La corde est lâchée sans vitesse initiale,

$$g'(x) = 0, \quad (3.63)$$

et la forme initiale de la corde est décrite par la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{16h}{(b-a)^4}(x-a)^2(b-x)^2, & a \leq x \leq b, \\ 0, & b \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3.64)$$

Elle est représentée sur la Fig. 3.8.

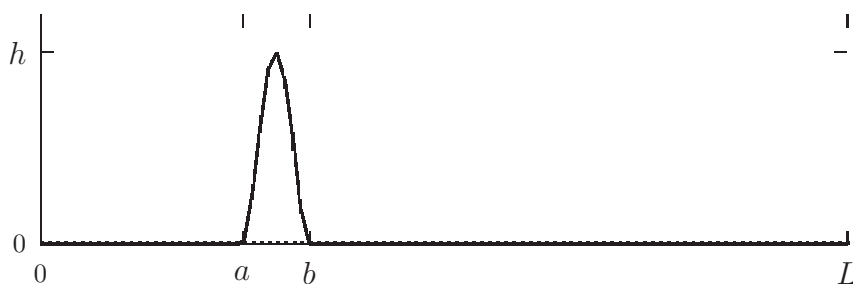


FIGURE 3.8 – La forme de la corde à l'instant initial (exemple 3).

Cette fonction, étant nulle sur des intervalles finis, ne peut-être dominée par un nombre restreint de modes normaux. En effet, elle possède une infinité de zéros et aucune combinaison finie d'ondes stationnaires ne peut reproduire exactement cette propriété. Toutefois, on peut espérer reproduire son allure qualitative avec un nombre fini de modes normaux. La fonction  $f$  est continue, ainsi que sa dérivée; le comportement asymptotique des coefficients  $C_n$  sera en  $1/n^3$ .

On trouve pour les coefficients  $D_n$  et  $C_n$  (le calcul est long pour ces derniers) :

$$D_n = 0, \quad (3.65)$$

$$C_n = \frac{32h}{(b-a)^4} \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^3 \left[ \left( (b-a)^2 - 12\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \right) \left( \cos\left(\frac{n\pi b}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \right) - 6\left(\frac{L}{n\pi}\right)(b-a) \left( \sin\left(\frac{n\pi b}{L}\right) + \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \right) \right]. \quad (3.66)$$

Nous avons représenté sur la Fig. 3.9 la fonction  $f(x)$  reconstruite avec les vingt-quatre premières fonctions propres. Nous constatons l'existence de petites fluctuations autour de zéro dans les régions où  $f(x)$  est exactement nulle. C'est la conséquence de la coupure de la série à partir d'un ordre fini évoquée plus haut. Néanmoins, le pic dans l'intervalle  $[a, b]$  est bien reproduit et cette approximation peut être utilisée pour l'étude de l'évolution de la forme de la corde au cours du temps.

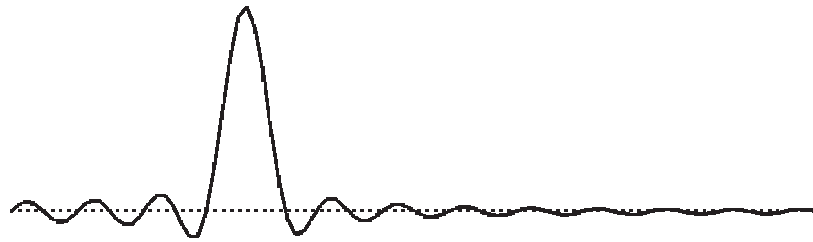


FIGURE 3.9 – La fonction  $f(x)$ , représentant la forme de la corde à l'instant initial, reconstruite avec les vingt-quatre premiers modes normaux du développement en série.

La fonction  $u(t, x)$  est donnée par l'expression (3.27) :

$$u(t, x) = \frac{64hL^2}{(b-a)^4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left[ \left( (b-a)^2 - 12\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \right) \left( \cos\left(\frac{n\pi b}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \right) - 6\left(\frac{L}{n\pi}\right)(b-a) \left( \sin\left(\frac{n\pi b}{L}\right) + \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right). \quad (3.67)$$

L'évolution de la forme de la corde au cours d'une période ( $T_1 = 2L/c$ ) est indiquée graphiquement sur les Figs. 3.10 et 3.11. Nous constatons que juste après l'instant initial ( $t = T_1/20$ ) la déformation de la corde se scinde en deux ondes d'amplitudes égales (moitié de l'amplitude initiale) qui se mettent en mouvement en sens inverses. L'onde de gauche, à cause de sa proximité, arrive la première à l'extrémité de la corde ( $x = 0$ ), où elle subit une réflexion ( $t = 3T_1/20$ ) ; son amplitude change alors de signe et elle continue ensuite son mouvement vers la droite. L'onde de droite arrive à son tour ( $t = 7T_1/20$ ) à l'autre extrémité ( $x = L$ ), où elle subit aussi une réflexion avec un changement de signe de son amplitude et continue ensuite son mouvement vers la gauche. Les deux ondes se rencontrent à mi-période à une position symétrique de celle de l'instant initial par rapport au milieu de la corde, où elles fusionnent et reforment une seule onde, symétrique

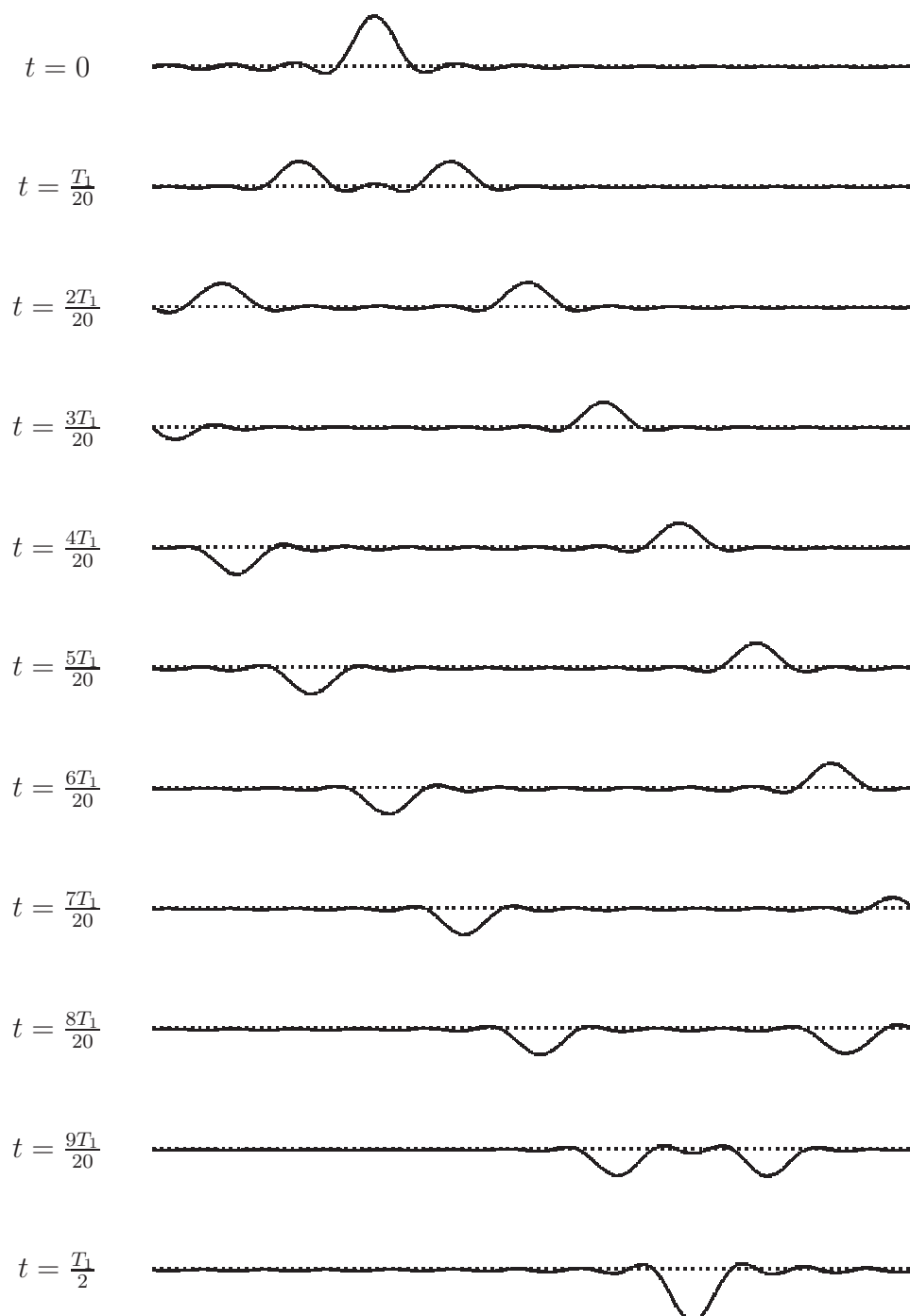


FIGURE 3.10 – Évolution de la forme de la corde pendant la première demi-période, entre  $t = 0$  et  $t = T_1/2 = L/c$ .

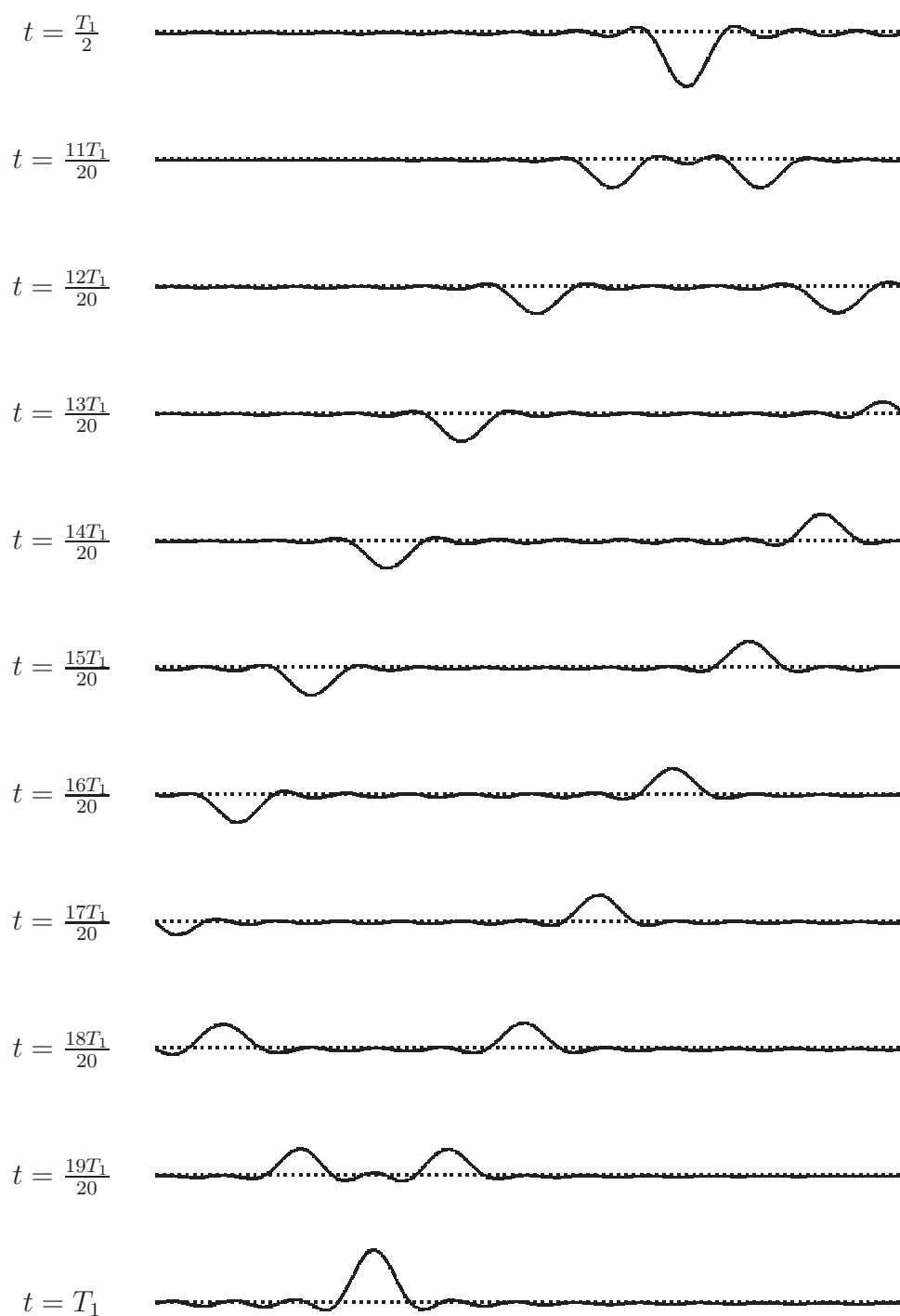


FIGURE 3.11 – Évolution de la forme de la corde pendant la deuxième demi-période, entre  $t = T_1/2 = L/c$  et  $t = T_1 = 2L/c$ .

de la première, mais d'amplitude opposée. Au cours de la demi-période suivante, le même type de mouvement reprend et finalement les deux ondes se rejoignent de nouveau à la position initiale, en reprenant la même forme initiale. Le mouvement ultérieur est une répétition périodique du mouvement précédent. Nous notons aussi qu'au cours de ce mouvement, les deux ondes séparées ont gardé la même forme (sauf au moment des réflexions) sans subir d'atténuation dans leur amplitude (absence de phénomènes d'amortissement et d'étalement).

Le comportement de la corde est conforme à ce qui était prédit à partir des ondes progressives (voir notamment Sect. 2.5, le cas des cordes lâchées sans vitesses initiales, l'Éq. (2.59) et l'exemple donné dans les Figs. 2.5 et 2.6, ainsi que le phénomène de réflexion sur une extrémité fixe, Sect. 2.6). Cet exemple montre que les ondes stationnaires, tout en décrivant des phénomènes oscillatoires peuvent aussi décrire le phénomène de propagation des ondes.

### 3.5 Équivalence entre les ondes stationnaires et les ondes progressives

Nous avons pu obtenir au cours du chapitre 2 et du présent chapitre deux descriptions différentes du mouvement de la corde vibrante. L'une, fondée sur les ondes progressives, est développée à partir du phénomène de la propagation des ondes sur la corde vibrante. L'autre, fondée sur les ondes stationnaires, est développée à partir du phénomène des oscillations de la corde. Ces deux descriptions sont complètes puisqu'elles produisent la solution générale de l'équation du mouvement des cordes vibrantes. Elles devraient donc être équivalentes, même si cette équivalence n'est pas manifeste au niveau des diverses expressions trouvées. Le résultat obtenu dans le dernier exemple de la section 3.4 confirme sur un cas concret cette assertion. Dans cette section, nous allons établir l'équivalence formelle entre les deux types de description.

On peut d'abord voir facilement qu'une onde stationnaire se décompose en deux ondes progressives se propageant en sens opposés. Pour cela, nous remplaçons, dans l'expression (3.24) de l'onde stationnaire, les produits des fonctions harmoniques par des expressions

équivalentes :

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) = \frac{1}{2} \left[ \sin\left(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right) + \sin\left(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\right) \right], \quad (3.68)$$

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) = \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\right) \right]. \quad (3.69)$$

La fonction  $u_n(t, x)$  prend alors la forme

$$\begin{aligned} u_n(t, x) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \left\{ C_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right) + \sin\left(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + D_n \left[ \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \left\{ \left[ C_n \sin\left(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right) + D_n \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ C_n \sin\left(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\right) - D_n \cos\left(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\right) \right] \right\}. \quad (3.70) \end{aligned}$$

Nous avons ainsi la superposition d'une onde progressive se propageant vers les  $x$  croissants (fonction de  $(x - ct)$ ) et d'une autre se propageant vers les  $x$  décroissants (fonction de  $(x + ct)$ ). Chacune de ces ondes progressives est elle-même la superposition de deux ondes planes sinusoidales. La particularité de l'onde stationnaire d'être le produit d'une fonction de  $t$  et d'une fonction de  $x$  résulte des relations qui existent entre les amplitudes de ces diverses ondes.

La solution générale  $u(t, x)$  [Éq. (3.27)] prend maintenant la forme :

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{L}} \left\{ C_n \left[ \sin\left(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right) + \sin\left(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + D_n \left[ \cos\left(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right) - \cos\left(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\right) \right] \right\}. \quad (3.71) \end{aligned}$$

Cette série peut être sommée et exprimée sous une forme compacte. Pour cela, nous remarquons que la série avec les coefficients  $C_n$  se déduit du développement en série de la fonction  $f(x)$  par les substitutions  $x \rightarrow x \mp ct$ . En effet, en effectuant ces substitutions dans l'expression de  $f(x)$  [Éq. (3.32)], nous trouvons :

$$f(x - ct) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} C_n \sin\left(\frac{n\pi(x-ct)}{L}\right), \quad (3.72)$$

$$f(x + ct) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} C_n \sin\left(\frac{n\pi(x+ct)}{L}\right). \quad (3.73)$$

La série avec les coefficients  $D_n$  peut être sommée en la comparant à la série donnant la fonction  $g(x)$ . Pour obtenir celle-ci, il suffit d'intégrer terme par terme la série de la fonction  $g'(x)$  [Éq. (3.33)], en ne retenant pas les constantes d'intégration. On trouve :

$$g(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} D_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (3.74)$$

La comparaison avec la série (3.71) nous montre que la partie de celle-ci contenant les coefficients  $D_n$  est obtenue de la série (3.74) par les substitutions  $x \rightarrow x \mp ct$ . On obtient ainsi :

$$g(x - ct) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} D_n \cos\left(\frac{n\pi(x - ct)}{L}\right), \quad (3.75)$$

$$g(x + ct) = - \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} D_n \cos\left(\frac{n\pi(x + ct)}{L}\right). \quad (3.76)$$

En tenant compte des expressions (3.72)-(3.73) et (3.75)-(3.76), la fonction  $u(t, x)$  prend la forme

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] - \frac{1}{2} [g(x - ct) - g(x + ct)] \\ &= \frac{1}{2} [f(x - ct) - g(x - ct)] + \frac{1}{2} [f(x + ct) + g(x + ct)], \end{aligned} \quad (3.77)$$

qui n'est autre que la solution générale obtenue à partir des ondes progressives, exprimée en fonction des conditions initiales, Éq. (2.58).

La relation avec les fonctions  $F$  et  $G$  est obtenue en utilisant les définitions (2.56) et (2.57) :

$$F(z) = \frac{1}{2} (f(z) - g(z)), \quad (3.78)$$

$$G(z) = \frac{1}{2} (f(z) + g(z)), \quad (3.79)$$

valables pour tout argument  $z$ . La fonction  $u(t, x)$  s'écrit alors :

$$u(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct). \quad (3.80)$$

Ce résultat général établit ainsi l'équivalence entre les descriptions utilisant les ondes stationnaires et les ondes progressives.

En conclusion de ce chapitre, on peut souligner le fait que les ondes progressives nous permettent d'obtenir les solutions générales de l'équation des cordes vibrantes sous



une forme très simple et d'étudier avec facilité le phénomène de la propagation des déformations (en positions et en vitesses) de la corde au cours du temps. Les ondes stationnaires sont mieux adaptées lorsque la déformation initiale de la corde couvre toute la longueur de la corde et lorsque les extrémités de celle-ci vérifient des conditions aux limites, fixes ou libres. Elles permettent aussi l'analyse harmonique en fréquences normales d'une onde donnée.

Ces deux méthodes de résolution et d'analyse se retrouvent aussi avec d'autres types d'équations du mouvement de la Physique. Par exemple, en Mécanique Quantique, où l'équation du mouvement est l'équation de Schrödinger, la méthode des ondes stationnaires permet l'étude des états liés, tandis que la méthode des ondes progressives permet l'étude des processus de diffusion.



# Chapitre 4

## Ondes sonores

### 4.1 Introduction

Le système de la corde tendue que nous avons étudié représente un exemple de système mécanique continu. Dans la mesure où on néglige le mouvement microscopique des atomes, on peut en principe repérer dans l'espace chaque point de la corde par un paramètre continu, représenté par l'abscisse  $x$  de ce point, et suivre son évolution au cours du temps. Pour une corde vérifiant les conditions physiques de transversalité du mouvement vibratoire, chaque point aura un mouvement dans le plan défini par une valeur donnée de l'abscisse  $x$  ; son mouvement est en principe visible à chaque instant (par exemple grâce à un film tournant au ralenti).

Mais tous les systèmes physiques ne rentrent pas dans la catégorie des systèmes mécaniques. C'est notamment le cas des systèmes appelés thermodynamiques. Pour de tels systèmes, il n'est pas possible de suivre au cours du temps les trajectoires ou les mouvements de leurs constituants ponctuels, même si ceux-ci représentent déjà des approximations de positions moyennes d'amas d'atomes. Cette situation se présente en général avec les fluides (gaz ou liquides). Les déformations internes de ces milieux continus sont telles que, même si on arrivait au départ à subdiviser leur volume en de petites cellules numérotées et repérables, très rapidement ces cellules se mélangeraient d'une façon inextricable où tout repérage individuel serait perdu. Ce qui a rendu possible un tel repérage avec la corde, c'est sa nature solide (mais déformable) où les positions relatives des constituants ponctuels restaient inchangées au cours du temps. En revanche, avec les fluides, on

doit abandonner la description mécanique de leurs constituants ponctuels et adopter une description globale de certaines de leurs propriétés macroscopiques observables ou mesurables. Une telle description a recours à la physique statistique, qui permet le calcul des valeurs moyennes de quantités physiques relatives aux constituants microscopiques non observables du système. On rencontre ainsi de nouvelles grandeurs physiques, appelées variables d'état, telles que température, pression, entropie, etc., qui sont reliées aux propriétés microscopiques sous-jacentes du système et en représentent les effets moyens.

Nous étudierons dans ce chapitre le mouvement vibratoire des ondes dites acoustiques ou sonores (parce que généralement audibles à l'oreille) qui apparaissent dans les gaz, les liquides et les solides. Pour une telle étude, nous aurons besoin de la méthode descriptive utilisée en thermodynamique, fondée sur les résultats de la physique statistique. C'est pourquoi nous présentons d'abord les notions élémentaires de thermodynamique qui seront nécessaires pour la description du système. Au cours de notre étude nous considérerons surtout les gaz, mais la plupart des résultats obtenus seront aussi valables pour les liquides et les solides.

## 4.2 Notions de thermodynamique

Un fluide est considéré comme étant en *état d'équilibre* lorsqu'on constate que toutes les grandeurs macroscopiques qui sont utilisées pour la description de son état gardent une valeur constante au cours du temps. En particulier, on ne constate aucune vitesse d'écoulement global d'une partie à l'autre du fluide. Toutefois, un fluide en état d'équilibre reste le siège d'une agitation microscopique, due au mouvement incessant et désordonné de ses atomes. Ce mouvement est appelé *agitation thermique*. A cause de ce mouvement, chaque atome possède une certaine énergie cinétique  $E_{ci}$  ( $i = 1, \dots, N$ ). L'énergie cinétique *moyenne* de chaque atome est :

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_{ci}. \quad (4.1)$$

La *température* du milieu, désignée par  $T$ , est une quantité qui représente le degré d'agitation thermique de celui-ci et est proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne des atomes. On a ainsi pour les gaz monoatomiques la relation :

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2}kT, \quad (4.2)$$

où la constante de proportionnalité  $k$  est appelée *constante de Boltzmann*, avec pour valeur  $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$  (en unités de Joule par kelvin). Le nombre multiplicatif 3 dans l'Éq. (4.2) provient des trois degrés de liberté que possède l'atome au cours de son mouvement dans l'espace. L'énergie cinétique étant une quantité positive, on déduit de l'équation précédente que la température  $T$ , appelée aussi *température absolue*, est une quantité positive ou nulle. Elle atteint sa valeur minimale nulle, appelée aussi *zéro absolu*, lorsque l'agitation thermique cesse ( $\langle E_c \rangle = 0$ ). La relation entre la température absolue, mesurée en kelvin (symbole  $K$ ), et la température conventionnelle, notée ici  $t_C$  et mesurée en degré Celsius (symbole  $^{\circ}C$ ), est :

$$T = 273,15 + t_C. \quad (4.3)$$

Ainsi,  $0^{\circ}C$  correspond à  $273,15 \text{ K}$  et le zéro absolu à  $-273,15^{\circ}C$ .

La relation (4.2) nous permet aussi d'obtenir la valeur moyenne du carré de la vitesse des atomes en fonction de la température. Puisque  $E_{ci} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_i^2$ ,  $m$  étant la masse de l'atome, on obtient :

$$v^* = \sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle} = \sqrt{3kT/m}. \quad (4.4)$$

A cause de l'agitation thermique, les atomes du fluide viennent constamment percuter les parois du récipient ou de l'enceinte où est placé le fluide et de ce fait ils exercent une force contre celles-ci. On définit la *pression* du fluide, notée  $P$ , comme étant la force exercée par unité de surface ; sous forme infinitésimale, on a la relation :

$$dF = PdS. \quad (4.5)$$

La pression peut être définie même à l'intérieur du fluide, loin des parois ; en effet on peut à tout instant plonger dans le fluide une surface très mince (afin de ne pas perturber l'état du système) et mesurer ainsi la force qui s'exerce sur cette surface placée en un point arbitraire du fluide. La pression a la dimension d'une force par surface ou d'une façon équivalente d'une énergie par volume, c'est à dire d'une densité volumique d'énergie. Elle se mesure en pascal (symbole Pa), égal à  $(1/1,013) \times 10^{-5}$  atmosphère (atm).

L'approximation des *gaz parfaits* consiste à négliger les interactions et les collisions mutuelles des constituants du gaz et à traiter le mouvement de chaque particule, considérée comme ponctuelle, indépendamment de celui des autres. Dans ces conditions la physique statistique permet assez facilement le calcul de diverses valeurs moyennes. En utilisant la

définition de la pression, on trouve :

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m v^{*2}, \quad (4.6)$$

où  $N$  est le nombre des atomes et  $V$  le volume du gaz. En utilisant l'Éq. (4.4) on obtient la relation

$$PV = NkT, \quad (4.7)$$

qui est appelée *équation d'état* des gaz parfaits. Cette équation est indépendante de la nature du gaz parfait considéré. En particulier, tous les gaz parfaits, considérés à la même température, occupant le même volume et ayant la même pression, contiennent le même nombre de molécules ; c'est la loi d'Avogadro.

L'équation d'état des gaz parfaits peut être réécrite de diverses manières. On introduit généralement le nombre d'Avogadro  $N_{Av}$ . qui représente le nombre d'atomes contenu dans 12 g de  $^{12}C$ , soit  $N_{Av} = 6,022 \times 10^{23}$ . La constante des gaz parfaits est définie par :

$$R = N_{Av}.k. \quad (4.8)$$

On définit la *mole* comme étant la quantité de matière d'un gaz correspondant à  $N_{Av}$  atomes ou molécules. Si  $N$  est le nombre total d'atomes, le nombre de moles est alors :  $n_m = N/N_{Av}$ . La valeur numérique de  $R$  est :  $R = 8,314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit :

$$PV = n_m RT. \quad (4.9)$$

Les *conditions normales* de température et de pression sont définies comme étant :  $T = 273,15 \text{ K}$  et  $P = 1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Dans ces conditions, le volume occupé par une mole d'un gaz parfait est, d'après l'Éq. (4.9),  $V_m = 22,4$  litres. Les vitesses moyennes d'agitation thermiques [Éq. (4.4)] sont de l'ordre de quelques centaines de mètres par seconde ou plus. Par exemple, on trouve pour l'hélium (masse molaire=4 g) :  $v^* \simeq 1300 \text{ m s}^{-1}$ .

Pour un gaz parfait, on peut définir *l'énergie interne* comme étant l'énergie cinétique totale des atomes. Pour un gaz monoatomique on trouve :

$$U = \sum_{i=1}^N E_{ci} = N \langle E_c \rangle = \frac{3}{2} NkT. \quad (4.10)$$

L'équation d'état (4.7) montre que les trois variables  $P$ ,  $V$  et  $T$  ne sont pas indépendantes. Deux d'entre elles seulement sont indépendantes, la troisième étant complètement

déterminée par l'équation d'état. Dans ce cas, on peut considérer le volume (par exemple) comme fonction de la pression et de la température :

$$V = V(P, T). \quad (4.11)$$

Des variations indépendantes de  $P$  et de  $T$  entraînent des variations de  $V$  :

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP + \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT, \quad (4.12)$$

où les indices  $T$  et  $P$  indiquent que la température et la pression sont respectivement maintenues constantes.

Considérons maintenant une transformation lente du système, au cours de laquelle la température reste constante ; une telle transformation est appelée *isotherme* ; par conséquent  $dT = 0$  et on déduit de l'Éq. (4.12) :

$$(dV)_T = \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP. \quad (4.13)$$

On définit le coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T$  par la relation :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T. \quad (4.14)$$

Pour les gaz parfaits, en utilisant l'Éq. (4.7) on trouve :

$$V = \frac{NkT}{P}, \quad \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{NkT}{P^2} = -\frac{V}{P}, \quad (4.15)$$

ce qui nous donne :

$$\chi_T = \frac{1}{P}. \quad (4.16)$$

Nous notons que  $\chi_T$  n'est pas une constante.

Une autre quantité importante apparaissant en thermodynamique est la *chaleur*. Elle représente une forme d'énergie de rayonnement électromagnétique de faible fréquence, appelée aussi énergie thermique ou calorifique, transférée d'un système à un autre et qui reste souvent partiellement ou totalement irrécupérable. Des exemples d'énergie thermique sont donnés par les phénomènes de chauffage, de frottement d'objets, de freinage, d'effet Joule dans les circuits électriques, etc. Le transfert de chaleur fait varier l'énergie interne d'un système. La variation infinitésimale correspondante sera désignée par  $\delta Q$  (comptée positivement pour l'énergie reçue).

D'autre part, la dilatation de volume du gaz permet aussi d'effectuer un *travail mécanique*, en poussant par exemple une cloison mobile. Le travail fourni par le système pour un déplacement infinitésimal  $d\ell$  d'une surface  $dS$  est égal à  $\delta\mathcal{T} = dF d\ell = PdS d\ell = PdV$ , où nous avons utilisé la définition (4.5) de la pression. En désignant par  $\delta W$  le travail infinitésimal algébrique *reçu* par le système, nous avons :

$$\delta W = -\delta\mathcal{T} = -PdV. \quad (4.17)$$

Ainsi  $\delta W$  est négatif lorsque le volume du gaz augmente. Cette équation reste aussi valable (algébriquement) lorsque le gaz est comprimé sous l'effet d'une force extérieure (par l'intermédiaire d'un piston par exemple);  $\delta W$  est alors positif. L'équation (4.17) est en fait valable uniquement lorsque la transformation considérée est *réversible*, c'est-à-dire constituée d'une succession d'états d'équilibre infiniment voisins; dans ce cas, la pression interne du gaz est contrebalancée à chaque instant par la pression externe exercée sur la cloison mobile et celle-ci a un mouvement avec une vitesse presque constante, généralement faible et négligeable devant la vitesse moyenne d'agitation thermique. Une transformation qui ne remplit pas cette condition est appelée *irréversible*. Dans un tel cas la pression exercée à chaque instant sur la cloison mobile n'est pas égale à la pression d'équilibre du gaz. Une transformation réversible a la propriété d'être inversible, en ce sens qu'en empruntant le chemin inverse de la transformation, on peut faire repasser le système et le milieu extérieur par tous les états antérieurs.

La variation (algébrique) de l'énergie interne du gaz est ainsi égale, au cours d'une transformation infinitésimale réversible, à la somme de la quantité de chaleur et du travail reçus par le système :

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - PdV. \quad (4.18)$$

[Remarque : Nous avons désigné les variations infinitésimales du travail et de la chaleur par des symboles commençant par  $\delta$  et non par  $d$ , pour souligner le fait qu'elles ne représentent pas des différentielles totales ou exactes. Il n'existe pas de fonctions explicites appelées travail et chaleur dont les quantités précédentes seraient les différentielles totales.]

Lorsqu'un système isolé ne se trouve pas dans un état d'équilibre, il subit des transformations irréversibles jusqu'à ce qu'un état d'équilibre soit atteint, à partir duquel il reste macroscopiquement inchangé. Pour décrire les transformations irréversibles il est nécessaire d'introduire une nouvelle quantité, appelée *entropie*, notée  $S$ , qui est définie



sous forme infinitésimale par la relation

$$dU = TdS - PdV, \quad (4.19)$$

valable pour toutes les transformations réversibles ou irréversibles. On montre en physique statistique que lorsqu'un système isolé subit des transformations irréversibles, il tend à évoluer vers une configuration possédant la probabilité thermodynamique maximale de réalisation. Lors d'une telle évolution l'entropie du système augmente. L'équilibre n'est atteint que lorsque l'entropie atteint sa valeur maximale. Par exemple, un système initialement hors d'équilibre, dans lequel la pression et la densité des particules varient d'un point à l'autre, laissé isolé, évolue vers un état d'équilibre où elles seront les mêmes partout.

Lorsqu'une transformation est réversible, avec échange de chaleur avec le milieu extérieur, on peut utiliser l'Éq. (4.18) et en la comparant à l'Éq. (4.19) on trouve :

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad (4.20)$$

Une transformation est appelée *adiabatique* lorsque le système n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur. On a dans ce cas  $\delta Q = 0$ . Si en outre la transformation est réversible, l'Éq. (4.20) implique  $dS = 0$ . Une telle transformation est appelée *isentropique*. On montre que lors d'une transformation isentropique, la pression et le volume d'un gaz parfait évoluent suivant l'équation

$$PV^\gamma = K = \text{constante}, \quad (4.21)$$

appelée loi de Laplace, où  $\gamma$  est une constante calculable. Pour un gaz monoatomique,  $\gamma = 5/3$ , et pour un gaz diatomique,  $\gamma = 7/5$ .

Au lieu de décrire l'état du système par la pression et la température, on peut aussi la décrire par la pression et l'entropie. Dans ce cas, le volume  $V$  du système sera fonction de  $P$  et de  $S$  :

$$V = V(P, S). \quad (4.22)$$

Pour des variations indépendantes de  $P$  et de  $S$ , on aura :

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S dP + \left( \frac{\partial V}{\partial S} \right)_P dS. \quad (4.23)$$

Lorsque la variation est isentropique,  $dS = 0$  et on obtient :

$$(dV)_S = \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S dP. \quad (4.24)$$

On définit le coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S$  par la relation

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S. \quad (4.25)$$

Pour un gaz parfait, on trouve d'après l'Éq. (4.21) :

$$\left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_S = -\frac{V}{\gamma P}, \quad (4.26)$$

ce qui donne pour  $\chi_S$  :

$$\chi_S = \frac{1}{\gamma P}, \quad (4.27)$$

qui est à comparer au coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T$  [Éq. (4.16)].

### 4.3 Équation du mouvement des ondes sonores

Nous considérerons désormais un tuyau cylindrique de section transverse  $S$ , rempli d'un gaz parfait, de masse volumique  $\rho_0$ , se trouvant à l'état d'équilibre, avec une pression  $P_0$  et une température  $T_0$ . Nous voulons étudier les petits mouvements *longitudinaux* du gaz autour de cette position d'équilibre. L'axe des  $x$  étant choisi parallèlement à l'axe du tuyau, nous nous plaçons dans l'approximation où le mouvement des diverses tranches de gaz ne dépend pas des variables transverses  $y$  et  $z$ ; par conséquent, chaque disque de gaz ayant une abscisse  $x$  aura un mouvement d'ensemble dépendant seulement de  $x$  et du temps  $t$ . Une telle approximation est possible lorsque la section transverse du tuyau est suffisamment grande et que les conditions aux limites sur la surface latérale du tuyau influent peu sur le mouvement de la partie centrale du gaz (proche de l'axe du tuyau). L'analogie mécanique de ce système est celui d'une chaîne rectiligne de ressorts couplés entre proches voisins et ayant des mouvements longitudinaux.

Avant d'établir l'équation du mouvement, nous voudrions souligner deux aspects généraux du problème.

Premièrement, comme nous l'avons vu dans le cadre de la thermodynamique, l'équation du mouvement qu'on se propose d'établir concerne l'aspect macroscopique du système. Si on considère à l'état d'équilibre une tranche infinitésimale de gaz, à cause de l'agitation thermique, dont la vitesse moyenne dans les conditions normales est de l'ordre de quelques centaines de mètres par seconde, les atomes présents dans cette tranche l'auront quittée d'une façon aléatoire aux instants ultérieurs. Mais à cause de l'état d'équilibre

macroscopique du système, d'autres atomes viendront les remplacer au même moment. Donc en moyenne tout se passe comme si la tranche conservait le même nombre d'atomes et la même quantité de matière.

Deuxièmement, lorsqu'un fluide perturbé, donc se trouvant en dehors de son état d'équilibre, est laissé isolé, il aura tendance à subir des transformations irréversibles jusqu'à ce qu'il atteigne un nouvel état d'équilibre. Par conséquent, contrairement aux systèmes mécaniques ne subissant pas de forces de freinage ou de frottement et ayant des mouvements oscillatoires perpétuels, les mouvements oscillatoires éventuels des fluides isolés finissent par s'atténuer et disparaître. Nous supposons cependant, sur la base de données expérimentales, que l'échelle de temps des transformations irréversibles est beaucoup plus longue que l'échelle de temps des phénomènes ondulatoires qu'on veut étudier. Dans ce cas, on peut considérer les transformations subies par le fluide comme étant *réversibles*, c'est-à-dire correspondant à une succession d'états d'équilibre infiniment voisins.

Nous repérons par l'abscisse  $x$  la position à l'état d'équilibre d'un disque de gaz de section transverse  $S$  et désignons par  $u(t, x)$  l'écart du disque à partir de sa position d'équilibre. Soit une tranche de gaz à l'état d'équilibre comprise entre deux disques de positions respectives  $x$  et  $x + dx$ , où  $dx$  est une quantité infinitésimale (voir Fig. 4.1).

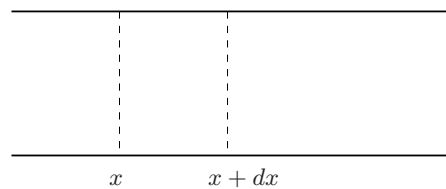


FIGURE 4.1 – Tranche de gaz à l'état d'équilibre  $(P_0, T_0)$ .

Après l'introduction d'une perturbation, le disque à la position  $x$  passe à  $x + u(t, x)$  et celui à la position  $x + dx$  à  $x + dx + u(t, x + dx)$  (voir Fig. 4.2).

Le volume initial de la tranche est :

$$(dV)_0 = Sdx. \quad (4.28)$$

Le nouveau volume est :

$$(dV) = S \left[ (x + dx + u(t, x + dx)) - (x + u(t, x)) \right] = S (dx + u(t, x + dx) - u(t, x)). \quad (4.29)$$

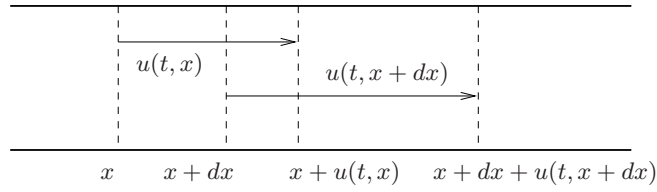


FIGURE 4.2 – Déplacement de la tranche de gaz après une perturbation.

La variation du volume est :

$$\Delta(dV) = (dV) - (dV)_0 = S(u(t, x + dx) - u(t, x)). \quad (4.30)$$

La quantité  $dx$  étant infinitésimale, on peut effectuer un développement limité de  $u(t, x + dx)$  jusqu'au premier ordre en  $dx$  :

$$u(t, x + dx) \simeq u(t, x) + dx \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \quad (4.31)$$

ce qui nous donne pour la variation du volume :

$$\Delta(dV) = S dx \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = (dV)_0 \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}. \quad (4.32)$$

La *dilatation*, notée  $\delta$ , est définie comme étant la variation relative du volume considéré :

$$\delta = \frac{\Delta(dV)}{(dV)_0} = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}. \quad (4.33)$$

La perturbation introduite dans le gaz conduit aussi à une modification de sa pression. Soit  $P(t, x)$  la pression à l'instant  $t$  à la position  $x$  du disque. On appelle *surpression* ou *pression acoustique*, notée  $p(t, x)$ , la différence entre  $P(t, x)$  et la pression à l'état d'équilibre :

$$p(t, x) = P(t, x) - P_0 = \Delta P(t, x). \quad (4.34)$$

On peut déterminer  $p(t, x)$  à partir de la loi d'évolution thermodynamique du gaz au cours de la transformation subie. Du point de vue physique, celle-ci a lieu suffisamment rapidement, de telle sorte que le gaz n'a pas la possibilité d'échanger de la chaleur avec le milieu extérieur (transformation adiabatique,  $\delta Q = 0$ ). En outre, la transformation étant réversible (cf. remarque générale au début de cette section), l'Éq. (4.20) implique aussi qu'elle est isentropique (à entropie constante,  $dS = 0$ ). Par conséquent la loi d'évolution

thermodynamique du gaz est donnée par l'Éq. (4.21). Les Éqs. (4.22)-(4.24) deviennent (avec  $dS = 0$ ) :

$$(dV)_0 = (dV)_0(P, S), \quad (4.35)$$

$$\Delta(dV) = \left(\frac{\partial(dV)}{\partial P}\right)_S \Delta P = \left(\frac{\partial(dV)}{\partial P}\right)_S p(t, x). \quad (4.36)$$

La dilatation devient :

$$\delta = \frac{\Delta(dV)}{(dV)_0} = \frac{1}{(dV)_0} \left(\frac{\partial(dV)}{\partial P}\right)_S p(t, x). \quad (4.37)$$

Or, le facteur multiplicatif de  $p(t, x)$  n'est autre que le coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S$  [Éq. (4.25)] (avec un signe moins), calculé ici avec un volume  $(dV)_0$  :

$$\frac{1}{(dV)_0} \left(\frac{\partial(dV)}{\partial P}\right)_S = -\chi_S. \quad (4.38)$$

On obtient ainsi :

$$\delta = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = -\chi_S p(t, x), \quad (4.39)$$

d'où on déduit :

$$p(t, x) = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}. \quad (4.40)$$

Notons aussi que d'après les Éqs. (4.37)-(4.38), le rapport des deux quantités infinitésimales  $\Delta(dV)$  et  $dV$  est aussi une quantité petite. En effet, l'équation d'évolution isentropique (4.26), utilisée avec le volume  $(dV)_0$  montre que

$$\left(\frac{\partial(dV)}{\partial P}\right)_S = -\frac{(dV)_0}{\gamma P} \simeq -\frac{(dV)_0}{\gamma P_0}; \quad (4.41)$$

cette quantité est ainsi proportionnelle à  $(dV)_0$  et celui-ci compense le dénominateur apparaissant dans l'Éq. (4.37);  $\delta$  est ainsi de l'ordre de grandeur de  $p/P_0$ .

Pour obtenir l'équation du mouvement, il faut tenir compte des forces qui interviennent lors du mouvement du gaz. Considérons de nouveau une tranche de gaz localisée entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  (Fig. 4.3).

D'après l'Éq. (4.5), la force agissant sur une surface est proportionnelle à la pression existant dans le gaz dans la région où se trouve la surface. Si on désigne par  $F(t, x)$  la force totale extérieure à la tranche agissant sur le disque de gaz se trouvant à l'abscisse  $x$  et par  $F(t, x + dx)$  celle agissant sur le disque à l'abscisse  $x + dx$ , on trouve pour la force

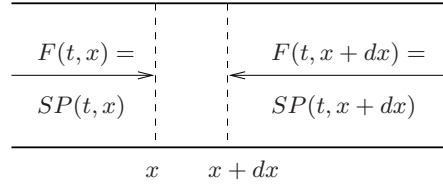


FIGURE 4.3 – Forces agissant sur la tranche de gaz.

totale agissant sur la tranche de gaz contenue entre les deux disques :

$$\begin{aligned}
 dF &= -F(t, x + dx) + F(t, x) \\
 &= -SP(t, x + dx) + SP(t, x) = -S \left[ (P_0 + p(t, x + dx)) - (P_0 + p(t, x)) \right] \\
 &= -S(p(t, x + dx) - p(t, x)) \\
 &\simeq -S \frac{\partial p(t, x)}{\partial x} dx,
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

où, dans la dernière expression nous avons développé la fonction  $p(t, x + dx)$  jusqu'au premier ordre en  $dx$  autour du point  $x$ . En utilisant la relation entre  $p$  et  $u$  [Éq. (4.40)], on trouve :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4.43}$$

D'autre part, la masse volumique étant  $\rho_0$ , la masse de gaz contenue dans la tranche, dont le volume est  $(dV)_0 = Sdx$ , est  $\rho_0 Sdx$ . L'accélération moyenne de la tranche est donnée par  $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}$ . (Celle-ci étant déjà multipliée dans l'équation du mouvement par la masse qui contient le facteur infinitésimal  $dx$ , il suffit de considérer une accélération moyenne commune à tous les points du gaz de la tranche.)

L'équation du mouvement (équation de Newton) s'écrit :

$$\rho_0 S dx \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = dF = -S \frac{\partial p(t, x)}{\partial x} dx, \tag{4.44}$$

et, en utilisant l'Éq. (4.43), on trouve :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \tag{4.45}$$

qui est l'équation du mouvement des ondes sonores. En définissant la *célérité*  $c$  ou *vitesse de propagation* de l'onde par

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_S}, \tag{4.46}$$

on a aussi :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0. \quad (4.47)$$

Cette équation est identique à l'équation des cordes vibrantes (2.15), avec les différences que la tension  $T_0$  de la corde est remplacée par l'inverse du coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S$  [Éq. (2.14)] et que  $\rho_0$  désigne une masse volumique (remplaçant la masse linéique  $\mu_0$ ).

La célérité  $c$  peut être calculée facilement à partir des données thermodynamiques du gaz. Pour l'air, dans les conditions normales de température et de pression, on a :  $\rho_0 = 1,29 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $P_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\gamma = 1,4$  (gaz diatomique, Éq. (4.21) et suite) et  $\chi_S = 0,71 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$  [Éq. (4.27)], ce qui donne :

$$c = 332 \text{ m s}^{-1}, \quad (4.48)$$

en accord avec les mesures expérimentales. Historiquement, c'est Newton qui a calculé le premier la vitesse du son dans l'air à partir des données thermodynamiques. Mais, au cours de ses calculs, il avait supposé que les transformations du gaz étaient isothermes (à température constante) et, de ce fait, avait utilisé le coefficient de compressibilité isotherme (4.16), au lieu du coefficient de compressibilité isentropique (4.27). Il avait alors trouvé, pour la valeur numérique de la vitesse du son,  $280 \text{ m s}^{-1}$ .

Pour un gaz parfait, on peut aussi exprimer la célérité en fonction (entre autres) de la température. En partant de l'Éq. (4.9) et en notant le fait que le nombre de moles est égal à la masse totale du gaz divisée par la masse molaire, on obtient :

$$P_0 V_0 = n_m R T_0 = \frac{\rho_0 V_0}{M_m} R T_0, \quad (4.49)$$

d'où on déduit :

$$P_0 = \frac{\rho_0 R}{M_m} T_0, \quad \chi_S = \frac{M_m}{\gamma \rho_0 R T_0}, \quad c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M_m}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}. \quad (4.50)$$

Les raisonnements appliqués aux gaz pour obtenir l'équation du mouvement s'appliquent aussi aux liquides. Par conséquent, les Éqs. (4.45)-(4.47) restent aussi valables dans ce cas. Par exemple, on a pour l'eau :  $\rho_0 = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\chi_S = 0,5 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$ , ce qui donne  $c = 1400 \text{ m s}^{-1}$ . [Le coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S$ , Éq. (4.25), est extrêmement petit pour les liquides comparativement aux gaz, car les liquides sont presque incompressibles ; une forte variation de la pression entraîne un faible changement de volume.]

Les Éqs. (4.45)-(4.47) restent aussi valables dans le cas des solides (barres, plaques, etc.) pour la propagation d'ondes vibratoires, mais avec d'autres valeurs des paramètres.

Finalement, les Éqs. (4.45)-(4.47), obtenues pour les élongations ou déplacements des tranches de gaz, peuvent aussi être réécrites pour les fonctions de dilatation et de surpression. En effet, en dérivant l'Éq. (4.47) par rapport à  $x$  et en utilisant la définition (4.33) de la dilatation, on obtient :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta(t, x)}{\partial x^2} = 0. \quad (4.51)$$

En divisant cette équation par  $-\chi_S$  et en utilisant la relation (4.39) entre la dilatation et la surpression on obtient aussi :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial x^2} = 0. \quad (4.52)$$

## 4.4 Conditions aux limites et de raccordement

Dans cette section, nous établirons les conditions aux limites qu'il faut imposer aux solutions, ainsi que les conditions de raccordement qui résultent lorsque deux gaz différents sont en contact l'un de l'autre.

Considérons d'abord un tuyau de longueur  $L$ , fermé à ses deux extrémités. Les disques de gaz situés aux abscisses  $x = 0$  et  $x = L$  n'ayant pas la possibilité d'avoir un mouvement d'élongation, les conditions aux limites à imposer sont :

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = 0, \quad (4.53)$$

valables pour tout  $t$ .

Les solutions correspondantes peuvent être cherchées sous la forme d'ondes stationnaires (chapitre 2). Ces solutions nous donnent aussi une idée de l'ordre de grandeur des diverses quantités physiques qui entrent en jeu. Considérons par exemple une onde stationnaire du type  $u_n(t, x) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \varphi_n)$ , avec  $k_n = \omega_n/c = n\pi/L$ . Choisissons en particulier le mode normal fondamental ( $n = 1$ ). Le coefficient  $A$  définit l'amplitude des vibrations ondulatoires. C'est une grandeur généralement très petite (pour les ondes sonores) et est de l'ordre de  $10^{-6}$  m (ou d'ordre inférieur). La vitesse vibratoire de l'onde est définie par  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . La dérivation par rapport à  $t$  fait apparaître un facteur  $\omega$  devant  $A$ ; par conséquent, l'amplitude de la vitesse vibratoire est donnée par  $A\omega$ . Pour un tuyau



de 1 m de longueur ( $L = 1$  m) rempli d'air ( $\rho_0 = 1,3 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $\chi_S = 0,71 \times 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$ ,  $c = 330 \text{ m s}^{-1}$ ), la période des vibrations est  $T_1 \simeq 7 \times 10^{-3}$  s. La longueur d'onde est :  $\lambda_1 = cT_1 = 2L = 2$  m. Le rapport de la vitesse vibratoire et de la vitesse de propagation de l'onde est donné par  $\frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}$  ; son ordre de grandeur est donné par  $A\omega/c \simeq 10^{-5}$ . La surpression est donnée par l'Éq. (4.40). La dérivation par rapport à  $x$  fait apparaître un facteur  $k$  devant  $A$  ; par conséquent, l'amplitude  $A_p$  de la surpression est donnée par  $Ak/\chi_S \simeq 1$  Pa. Sachant que la pression d'équilibre  $P_0$  dans les conditions normales est égale à  $10^5$  Pa, on trouve  $A_p/P_0 \simeq 10^{-5}$ . Ces résultats montrent que les effets du mouvement vibratoire de l'onde sont effectivement petits devant les grandeurs caractéristiques du gaz à l'état d'équilibre et justifient les diverses approximations effectuées au cours des calculs.

Nous considérons maintenant un tuyau dans lequel deux gaz non mélangés sont en contact à la position d'abscisse  $x_0$ , le gaz 1 occupant la partie gauche du tuyau et le gaz 2 la partie droite (Fig. 4.4).

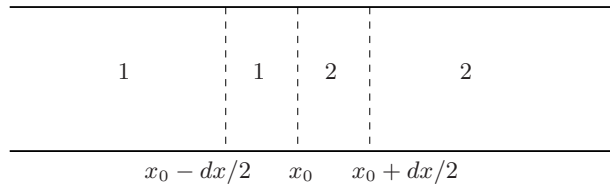


FIGURE 4.4 – Deux gaz différents à l'équilibre en contact à l'abscisse  $x_0$ .

Les masses volumiques, coefficients de compressibilité isentropique et célérités respectifs des deux gaz sont  $\rho_{10}$ ,  $\chi_{S1}$ ,  $c_1$  et  $\rho_{20}$ ,  $\chi_{S2}$ ,  $c_2$ . La pression d'équilibre commune est  $P_{10} = P_{20} = P_0$ . Les déplacements dans les gaz 1 et 2 seront désignés respectivement par  $u_1$  et  $u_2$  ; ceux-ci vérifient séparément l'équation du mouvement (4.47) avec les célérités respectives  $c_1$  et  $c_2$ . La propriété de continuité du déplacement sur la surface de séparation nous donne une première condition :

$$u_1(t, x_0) = u_2(t, x_0) = u(t, x_0); \quad (4.54)$$

elle est valable quel soit  $t$  ; par conséquent, en dérivant l'Éq. (4.54) par rapport au temps, on en déduit aussi des propriétés de continuité pour les vitesses et les accélérations. Cette équation montre aussi que lorsque dans le milieu 1 (par exemple) l'onde est périodique, caractérisée par une pulsation  $\omega$ , l'onde dans le milieu 2 doit aussi être périodique avec la

même pulsation  $\omega$  (sinon l'équation ne pourra être satisfaite pour tout  $t$ ). Par conséquent, une onde périodique, lors de sa traversée de milieux différents, garde la même pulsation. Cette conclusion est aussi valable pour les cordes vibrantes [Éq. (2.19)].

La deuxième condition est obtenue en comparant les forces qui agissent sur la surface de séparation. Considérons pour cela une tranche de gaz 1 d'épaisseur  $dx/2$  à gauche de  $x_0$  et une tranche de gaz 2 de même épaisseur à droite de  $x_0$  (Fig. 4.4). En nous référant à l'Éq. (4.42), la force totale agissant sur la tranche est :

$$\begin{aligned} dF &= -F_2(t, x_0 + \frac{dx}{2}) + F_1(t, x_0 - \frac{dx}{2}) \\ &= -S(p_2(t, x_0 + \frac{dx}{2}) - p_1(t, x_0 - \frac{dx}{2})). \end{aligned} \quad (4.55)$$

La masse contenue dans cette tranche de gaz est égale à  $\rho_{10}Sdx/2 + \rho_{20}Sdx/2$ . L'équation de Newton correspondante s'écrit :

$$\frac{1}{2}(\rho_{10} + \rho_{20})Sdx \frac{\partial^2 u(t, x_0)}{\partial t^2} = S(p_1(t, x_0 - \frac{dx}{2}) - p_2(t, x_0 + \frac{dx}{2})). \quad (4.56)$$

En prenant la limite  $dx \rightarrow 0$ , le premier membre tend vers zéro, ce qui implique que le deuxième membre aussi doit tendre vers zéro ; on trouve ainsi :

$$p_1(t, x_0) = p_2(t, x_0), \quad (4.57)$$

qui traduit la propriété de continuité de la surpression sur la surface de séparation. En utilisant l'expression explicite de la surpression [Éq. (4.40)], l'équation précédente s'écrit aussi :

$$\frac{1}{\chi_{S1}} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{\chi_{S2}} \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0}. \quad (4.58)$$

Les Éqs. (4.54) et (4.58) sont à comparer aux conditions similaires trouvées dans le cas des cordes vibrantes [Éqs. (2.19) et (2.22)].

Nous étudions maintenant une situation plus générale que celle étudiée précédemment, en considérant le cas où les deux gaz en contact se trouvent dans des tuyaux de sections différentes,  $S_1$  et  $S_2$  (Fig. 4.5).

À l'état d'équilibre, nous avons toujours  $P_{10} = P_{20} = P_0$ . On admet que si le gaz 1 recule, le volume laissé libre est occupé par le gaz 2 et inversement (Fig. 4.6). Le volume (algébrique) libéré par le gaz 1 est  $S_1 u_1(t, x_0)$ . Le volume correspondant à l'avancée du gaz 2, calculé comme si la section du tuyau n'avait pas changé, est  $S_2 u_2(t, x_0)$ . L'égalité

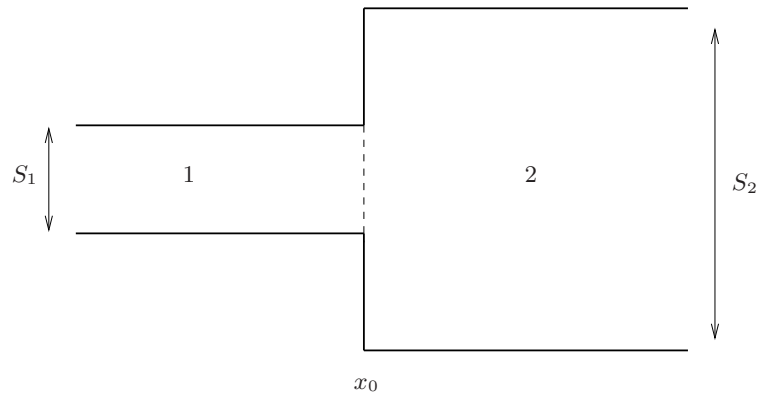


FIGURE 4.5 – Deux fluides dans des tuyaux de sections différentes.

des deux volumes nous donne :

$$S_1 u_1(t, x_0) = S_2 u_2(t, x_0). \quad (4.59)$$

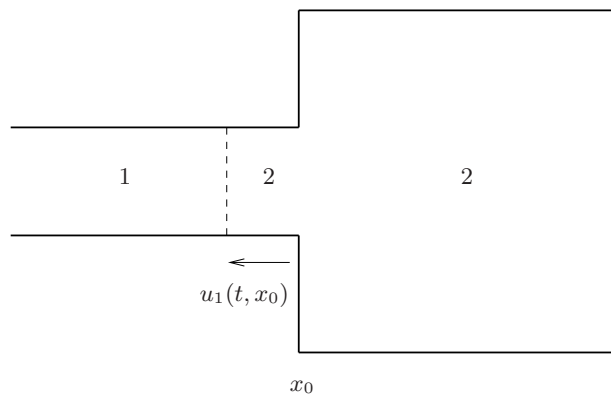


FIGURE 4.6 – Recul du fluide 1 et avancée du fluide 2.

Lorsque le gaz 1 recule, c'est  $u_1(t, x_0)$  qui donne la position de la surface de séparation, car dans le tuyau 1 les vibrations du gaz 2 devraient être décrites par une fonction  $\bar{u}_2(t, x_0)$  qui est différente de  $u_2(t, x_0)$ , celle-ci ayant été définie dans un tuyau de section  $S_2$  et non  $S_1$ . ( $\bar{u}_2(t, x_0)$  vérifie la condition  $\bar{u}_2(t, x_0) = u_1(t, x_0)$ .) De même, lorsque le gaz 2 recule, c'est  $u_2(t, x_0)$  qui donne la position de la surface de séparation. Nous vérifions que pour  $S_1 = S_2$  on retrouve la condition de continuité (4.54). Lorsque  $S_2 = 0$ , nous avons le cas d'un tuyau fermé. Dans ce cas, l'Éq. (4.59) reproduit la condition aux limites (4.53) d'un tuyau fermé à une extrémité (au moins).

La condition de raccordement (4.59) peut aussi être interprétée à l'aide du *débit*. En la dérivant par rapport au temps, on trouve :

$$S_1 \frac{\partial u_1(t, x_0)}{\partial t} = S_2 \frac{\partial u_2(t, x_0)}{\partial t}. \quad (4.60)$$

Le débit d'un fluide à une position donnée est défini comme étant le volume du fluide traversant cette position par unité de temps. La quantité  $\partial u / \partial t$  n'est autre que la vitesse de déplacement (ou vitesse vibratoire) du fluide et son produit avec la section orthogonale du tube où se trouve le fluide représente le débit de celui-ci. (Le produit  $Su$  est le volume déplacé et sa dérivée par rapport au temps est le volume déplacé par unité de temps.) L'équation (4.60) représente donc l'égalité des débits des deux fluides autour de la frontière les séparant. Ceci traduit aussi la *continuité du débit* sur la frontière de séparation.

La deuxième condition de raccordement exprime toujours la continuité de la surpression [Éq. (4.57)]. En effet, on peut reprendre le raisonnement qui a précédé cette dernière équation en utilisant cette fois une surface élémentaire  $\Delta S$  ( $< S_1$  et  $S_2$ ) commune aux deux gaz. L'égalité des surpressions ne dépend pas des sections des tuyaux, pourvu que les conditions d'équilibre des pressions ( $P_{10} = P_{20} = P_0$ ) soient préalablement réalisées.

L'équation (4.59) nous permet aussi d'obtenir la condition lorsque l'une des extrémités du tuyau est ouverte à l'air libre (Fig. 4.7). Cette situation peut être atteinte en faisant tendre la surface  $S_2$  de la section du deuxième tuyau vers l'infini.

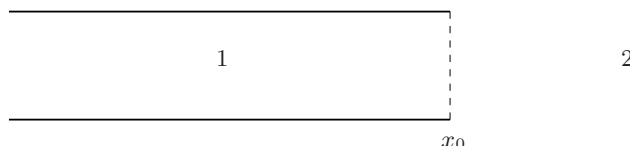


FIGURE 4.7 – Tuyau avec une extrémité ouverte.

À l'extérieur (air libre) règne un état d'équilibre avec une pression  $P_0$ . Nous supposons que les ondes sonores du tuyau n'ont pas d'effet notable sur le milieu extérieur. Par conséquent, à l'air libre, considéré comme le milieu 2, la surpression  $p_2$  peut être considérée comme nulle. Les Éqs. (4.57)-(4.58) nous donnent (en enlevant l'indice 1 du gaz du tuyau) :

$$p(t, x_0) = 0, \quad (4.61)$$

$$\left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0. \quad (4.62)$$

Cette dernière équation est identique à celle obtenue avec une corde vibrante ayant une extrémité libre [Éq. (2.23)]. D'autre part, l'Éq. (4.59) nous donne :

$$u_2(t, x_0) = \lim_{S_2 \rightarrow \infty} \frac{S}{S_2} u(t, x_0) = 0. \quad (4.63)$$

Toutefois, cette équation ne présente pas une utilité particulière, car elle ne détermine pas  $u(t, x_0)$  (le produit  $Su$  reste finie). Nous avons une situation analogue dans le cas d'une corde vibrante avec une extrémité libre, où la condition (2.23) concernant l'extrémité libre laissait indéterminée la valeur de  $u(t, x_0)$ . Celle-ci est fixée lorsqu'on utilise la condition aux limites à l'autre extrémité du tuyau ou lorsqu'on connaît le comportement de l'onde dans cette région.

Une situation plus générale que celles étudiées précédemment peut résulter lorsque les deux gaz du tuyau sont séparés par une mince lame matérielle mobile de masse  $m$  dont le rôle est d'empêcher les gaz de se mélanger tout en permettant leur mouvement. Le problème ressemble ici à celui de deux cordes jointes l'une à l'autre par un anneau massif (cf. Sect. 2.3). Si l'épaisseur de la lame est négligeable, les conditions de continuité des déplacements ou des débits [Éqs. (4.54) ou (4.59) ou (4.60)] restent inchangées. En revanche, la masse  $m$  de la lame intervient dans l'équation du mouvement concernant la tranche de gaz entourant la surface de séparation. Considérons le cas simple où les deux gaz se trouvent dans un même tuyau de section  $S$ . Dans le premier membre de l'équation du mouvement (4.56), la masse qui multiplie l'accélération est maintenant égale à  $(m + (\rho_{10} + \rho_{20})Sdx/2)$ . Dans la limite  $dx = 0$ , l'Éq. (4.57) est remplacée par

$$m \frac{\partial^2 u(t, x_0)}{\partial t^2} = S(p_1(t, x_0) - p_2(t, x_0)). \quad (4.64)$$

En divisant les deux membres par  $S$ , on voit que la contribution de la lame est proportionnelle à  $\sigma \equiv m/S$ , sa masse surfacique.

Pour un tuyau ouvert à une extrémité (en  $x = x_0$ ), avec la lame placée à cette extrémité, l'Éq. (4.61) est remplacée par

$$m \frac{\partial^2 u(t, x_0)}{\partial t^2} = Sp(t, x_0). \quad (4.65)$$

Les instruments de musique à vent (clarinette, hautbois, trompette, orgue, etc.) peuvent être considérés, avec certaines approximations, comme des tuyaux sonores ouverts au moins à l'une des extrémités. L'extrémité considérée comme fermée n'est en réalité pas

complètement fermée et permet à travers un petit orifice l'introduction de l'air extérieur. Dans cette situation, on peut y appliquer soit la première équation (4.53) soit l'Éq. (4.59) avec  $S_1$  très petit, l'intérieur du tuyau correspondant dans ce cas au milieu 2. A l'autre extrémité ( $x = L$ ), il faut appliquer la condition (4.62). Mais cette dernière équation reste approximative, car l'air insufflé dans l'instrument provoque une perturbation suffisamment forte pour que celle-ci puisse créer à partir de l'autre extrémité des ondes sonores dans l'air libre. C'est d'ailleurs pour cette raison que ces instruments sont audibles. Par conséquent, pour utiliser la condition aux limites en  $x = L$  avec plus de précision, il faudrait tenir compte aussi du mouvement de l'onde dans l'air libre. Dans ce cas, on peut utiliser la condition (4.59), sous la forme  $S_2 u_2 = S_3 u_3$ , en supposant que  $S_3$  est grand mais fini, et en tenant compte des vibrations de l'air libre, représentées par  $u_3$ .

## 4.5 Ondes stationnaires et ondes progressives

L'équation du mouvement (4.47) étant formellement identique à celle des cordes vibrantes, sa résolution et l'étude des propriétés des solutions suivent les mêmes méthodes d'approche. Tous les résultats obtenus dans le cadre des ondes progressives et stationnaires (chapitres 2 et 3) restent valables aussi pour les ondes sonores et ne seront pas repris. Nous considérerons dans cette section, à titre d'illustrations, deux exemples, l'un pour les ondes stationnaires, l'autre pour les ondes progressives, dans le cas du tuyau ouvert d'un seul côté (Fig. 4.7).

Considérons d'abord le cas des ondes stationnaires (cf. Sect. 3.2). La solution de l'Éq. (4.47), vérifiant la condition de stationnarité, Éq. (3.11), est [Éq. (3.17)] :

$$u(t, x) = \left( A \sin(kx) + B \cos(kx) \right) \cos(\omega t + \varphi), \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (4.66)$$

En  $x = 0$ , il faut utiliser la première équation (4.53), ce qui nous donne  $B = 0$ . En  $x = L$ , il faut utiliser l'Éq. (4.62) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = kA \cos(kL) \cos(\omega t + \varphi) = 0, \quad (4.67)$$

dont la solution est :

$$k_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.68)$$

Les valeurs possibles de la pulsation sont :

$$\omega_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi c}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.69)$$

et la solution pour  $u$  s'écrit :

$$u_n(t, x) = A_n \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi ct}{L} + \varphi_n\right). \quad (4.70)$$

La pulsation ne peut ainsi prendre que des valeurs discrètes. Ceci signifie qu'on ne peut établir des ondes dans le tuyau considéré que si elles oscillent avec des pulsations données par l'Éq. (4.69) ou qui sont des superpositions linéaires de telles oscillations.

Pour produire des ondes progressives, on peut supposer que le tuyau est extrêmement long, de telle sorte qu'on puisse ignorer la condition aux limites du côté gauche. On peut aussi supposer qu'une force extérieure (un musicien par exemple) envoie régulièrement des ondes progressives se dirigeant au début vers la droite. Nous considérons le cas des ondes planes sinusoïdales (Sects. 1.5 et 1.6) dans leur représentation complexe [Éqs. (1.15) et (1.25)] :

$$\tilde{u}_i(t, x) = Ae^{i(kx - \omega t + \varphi)}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (4.71)$$

$A$  étant réel et où l'indice  $i$  signifie que l'onde est incidente, c'est-à-dire envoyée vers la frontière  $x = L$ . Mais cette onde seule ne peut satisfaire à la condition aux limites (4.62). Physiquement, il faudrait s'attendre à ce qu'en rencontrant la frontière  $x = L$  elle produise une onde réfléchie se dirigeant en sens inverse (cf. Sect. 2.6). La forme de cette onde est [Éqs. (1.22) et (1.27)] :

$$\tilde{u}_r(t, x) = Be^{i(-kx - \omega t)}, \quad (4.72)$$

$B$  étant un coefficient complexe et où l'indice  $r$  signifie que l'onde est réfléchie ; en outre, celle-ci doit avoir la même pulsation  $\omega$  que l'onde incidente pour satisfaire à la condition aux limites en  $x = L$ , qui est valable pour tout  $t$ . L'onde totale dans le tuyau est :

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}_i + \tilde{u}_r \\ &= Ae^{i(kx - \omega t + \varphi)} + Be^{i(-kx - \omega t)}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

La condition (4.62) s'écrit :

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right|_{x=L} &= ik \left[ Ae^{i(kx - \omega t + \varphi)} - Be^{i(-kx - \omega t)} \right] \Big|_{x=L} \\ &= ike^{-i\omega t} [Ae^{i(kL + \varphi)} - Be^{-ikL}] = 0, \end{aligned} \quad (4.74)$$

d'où on obtient l'expression de  $B$  :

$$B = Ae^{i(2kL + \varphi)}. \quad (4.75)$$

La fonction  $\tilde{u}$  représentant l'onde totale prend la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= Ae^{i(kx - \omega t + \varphi)} + Ae^{i(-kx - \omega t + 2kL + \varphi)} \\ &= Ae^{i(-\omega t + \varphi + kL)} [e^{ik(x-L)} + e^{-ik(x-L)}] \\ &= 2Ae^{i(-\omega t + \varphi + kL)} \cos k(x-L).\end{aligned}\tag{4.76}$$

En représentation réelle, l'onde est représentée par la partie réelle de  $\tilde{u}$  :

$$u(t, x) = \mathcal{Re}(\tilde{u}(t, x)) = 2A \cos(-\omega t + \varphi + kL) \cos k(x - L).\tag{4.77}$$

Elle a aussi la forme d'une onde stationnaire, étant le produit d'une fonction de  $t$  et d'une fonction de  $x$ , mais ici la pulsation  $\omega$  peut prendre des valeurs continues arbitraires à cause du mouvement forcé imposé à l'onde à l'extrémité  $x = 0$  du tuyau. L'onde possède des points fixes (nœuds) correspondant aux zéros de la fonction  $\cos(k(x-L))$ ; ceux-ci ne peuvent apparaître dans l'intervalle  $[0, L]$  que pour des valeurs de  $\omega$  supérieures à  $\pi c/(2L)$ . (Voir aussi l'exemple traité à la fin de la Sect. 2.5.)

## 4.6 Puissance transportée par l'onde sonore

Les ondes, en se déplaçant, transportent de l'énergie. Celle-ci est constituée de l'énergie cinétique de vibration des constituants du milieu et de l'énergie potentielle due à l'écart du système de son état d'équilibre. Ce phénomène peut le mieux se voir sur les cordes vibrantes. Si une déformation localisée est créée sur une corde initialement à l'état d'équilibre, elle nécessite l'apport d'une certaine quantité d'énergie pour vaincre les forces de tension de la corde tendue et la déformer et qui se transforme en une énergie potentielle de la corde. Lorsque la corde est lâchée, le mouvement vibratoire de la corde produit aussi une énergie cinétique; une partie de celle-ci peut aussi provenir des vitesses initiales données à certaines parties de la corde. Mais l'onde, en se déplaçant, transporte ces énergies vers d'autres parties de la corde, qui au départ étaient à l'état d'équilibre, mais qui, après l'arrivée de l'onde commencent à vibrer. Ces considérations s'appliquent aussi aux gaz et aux ondes sonores qui s'y propagent.

Une propriété fondamentale de l'énergie est sa loi de conservation : *l'énergie totale* d'un système isolé reste conservée au cours du temps. Dans un système complexe, il peut y avoir des transferts d'énergie d'un sous-système à l'autre, mais ceux-ci doivent respecter



la conservation de l'énergie totale. Dans un milieu qui n'est ni visqueux, ni dissipatif, l'énergie transportée n'est pas dissipée au cours du déplacement (sur des intervalles de temps beaucoup plus faibles que l'échelle de temps des transformations irréversibles que le système peut subir, s'il s'agit d'un système thermodynamique).

La puissance transportée représente l'énergie transportée par unité de temps. Elle est égale à la force appliquée sur le milieu pour créer l'onde de propagation multipliée par la vitesse de déplacement (l'énergie étant égale à la force appliquée multipliée par le déplacement). Le déplacement dont il s'agit ici est le déplacement vibratoire des constituants du gaz ; la vitesse vibratoire est donnée par la formule (2.9) :

$$v(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}. \quad (4.78)$$

D'autre part, pour créer dans un gaz à l'état d'équilibre à la pression  $P_0$  un mouvement vibratoire et envoyer ainsi une onde progressive dans une direction donnée, il faut appliquer sur l'une des faces d'une tranche de gaz une *surpression*  $p(t, x)$  [Éq. (4.40)]. Celle-ci produit sur la face de la tranche de gaz une force totale égale à la surpression multipliée par l'aire  $S$  de la section droite du tuyau dans lequel se trouve le gaz.

On trouve ainsi pour l'expression de la puissance transportée par l'onde sonore

$$\mathcal{P}(t, x) = Sp(t, x)v(t, x) = -\frac{S}{\chi_S} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.79)$$

Cette formule, obtenue par des considérations qualitatives, peut être démontrée en utilisant l'équation du mouvement des ondes sonores et une forme locale de la loi de conservation de l'énergie. Notons aussi que la puissance transportée est une quantité algébrique, dont le signe dépend du sens de propagation de l'onde considérée.

*Il est à noter que la puissance, étant une grandeur physique mesurable, est une quantité réelle. Elle doit donc être calculée dans la représentation réelle du déplacement  $u$ . Si celui-ci est donné en représentation complexe, il faudrait auparavant passer en représentation réelle, en prenant sa partie réelle, et faire de même avec la vitesse vibratoire et la surpression. La puissance étant une fonction quadratique de  $u$  et de ses dérivées, la partie réelle du résultat du calcul effectué en représentation complexe ne coïncide pas avec celui effectué dès le départ en représentation réelle, cette dernière donnant le résultat correct.*

Les mouvements forcés, imposés notamment à l'une des extrémités du tuyau, produisent un transfert d'énergie vers l'autre extrémité. Par exemple, un piston de section

$S$ , placé à l'une des extrémités, peut imposer un mouvement forcé à l'onde sonore (Fig. 4.8), dont il faut tenir compte par une condition aux limites du type de l'Éq. (2.62).

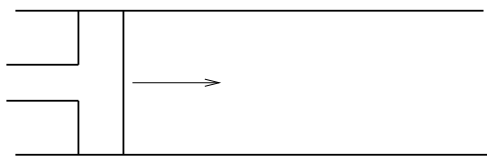


FIGURE 4.8 – Piston imposant un mouvement forcé à l'onde sonore.

Considérons à titre d'exemple un mouvement forcé périodique, de période  $T$ , qui se répercute aussi sur l'onde sonore progressive qui se propage à l'intérieur du tuyau. L'ordre de grandeur de  $T$  est en général très petit. (Par exemple, pour l'onde stationnaire fondamentale,  $T_1 = 2L/c$ ; pour une longueur  $L = 1$  m avec  $c = 330$  m s<sup>-1</sup>, on a  $T \sim 10^{-2}$  s.) Dans ces conditions, on ne peut mesurer une quantité physique comme la puissance qu'en valeur moyenne dans le temps. Celle-ci est définie par

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt \mathcal{P}(t, x) = \frac{1}{T} S \int_{t_0}^{t_0+T} dt p(t, x) v(t, x). \quad (4.80)$$

A cause de la propriété de périodicité de l'onde et de la structure de l'onde progressive (combinaison linéaire de  $t$  et de  $x$ ), le résultat de l'intégrale ne dépend pas de  $t_0$  et de  $x$ . Par conséquent, on peut au cours des calculs choisir les valeurs particulières les plus convenables de  $t_0$  et de  $x$ .

Nous allons effectuer le calcul de  $\overline{\mathcal{P}}$  et vérifier ces propriétés dans le cas particulier d'une onde plane sinusoïdale (Sects. 1.5 et 1.6), représentant une onde progressive se dirigeant vers la droite :

$$\tilde{u}(t, x) = Ae^{i(kx - \omega t + \varphi)}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (4.81)$$

où  $A$  est réel. La puissance, étant une grandeur mesurable, doit être calculée en représentation réelle. L'onde précédente s'écrit en représentation réelle :

$$u(t, x) = A \cos(kx - \omega t + \varphi). \quad (4.82)$$

L'onde plane (4.82) est périodique en  $t$ , de période  $T = 2\pi/\omega$ ; mais cette périodicité se répercute aussi sur la dépendance en  $x$ , pour laquelle la périodicité est donnée par la

longueur d'onde  $\lambda = cT$  [Éqs. (1.19) et (1.20)]. Dans l'expression (4.82),  $A$  représente l'amplitude de l'onde et sa valeur détermine l'ordre de grandeur des déplacements  $u$ .

La vitesse vibratoire est donnée par

$$v(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = A\omega \sin(kx - \omega t + \varphi) \equiv v_0 \sin(kx - \omega t + \varphi). \quad (4.83)$$

Son amplitude est  $v_0 = A\omega$ .

La dérivée spatiale de  $u$  est

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = -Ak \sin(kx - \omega t + \varphi). \quad (4.84)$$

On en déduit la surpression :

$$p(t, x) = \frac{Ak}{\chi_S} \sin(kx - \omega t + \varphi) \equiv p_0 \sin(kx - \omega t + \varphi). \quad (4.85)$$

Son amplitude est  $p_0 = Ak/\chi_S$ .

La puissance transportée est :

$$\mathcal{P}(t, x) = \frac{S}{\chi_S} A^2 k \omega \sin^2(kx - \omega t + \varphi). \quad (4.86)$$

En utilisant l'Éq. (4.80), on trouve pour la puissance moyenne transportée :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}} &= \frac{1}{T} S \frac{1}{\chi_S} A^2 k \omega \int_{t_0}^{t_0+T} dt \sin^2(kx - \omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{T} S \frac{1}{\chi_S} A^2 k \omega \int_{t_0}^{t_0+T} dt \frac{1}{2} [1 - \cos(2(kx - \omega t + \varphi))]. \end{aligned} \quad (4.87)$$

L'intégrale se calcule explicitement ; la contribution de la fonction cosinus est nulle, à cause de l'intégration sur une période. On trouve :

$$\overline{\mathcal{P}} = S \frac{A^2 \omega^2}{2\chi_S c} = \frac{1}{2} S A^2 \omega^2 \rho_0 c. \quad (4.88)$$

L'intensité de l'onde, notée  $I$ , est définie comme étant égale au module de la puissance moyenne transportée par unité de surface :

$$I = \frac{|\overline{\mathcal{P}}|}{S}. \quad (4.89)$$

Pour l'onde plane considérée plus haut, on obtient à partir de l'Éq. (4.88) :

$$I = \frac{A^2 \omega^2}{2\chi_S c} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \rho_0 c. \quad (4.90)$$

L'*impédance* est définie comme étant égale au module du rapport de la surpression et du *débit* (vitesse vibratoire  $\times$  aire  $S$  de la section du tuyau) :

$$Z = \left| p(t, x) / (Sv(t, x)) \right|. \quad (4.91)$$

Or, pour une onde progressive se dirigeant dans un seul sens (droite ou gauche), la vitesse vibratoire est proportionnelle à la dérivée spatiale de l'onde [Éqs. (2.47)] :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| = c \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|. \quad (4.92)$$

En utilisant l'expression (4.40) de la surpression, on trouve :

$$Z = \frac{1}{c\chi_S S} = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}} = \frac{1}{S} c\rho_0. \quad (4.93)$$

La puissance moyenne (4.88) prend la forme :

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} Z (A\omega S)^2. \quad (4.94)$$

La quantité  $A\omega S$  représente l'amplitude du débit (ou du flux de la vitesse vibratoire) à travers la surface  $S$  et est similaire à une intensité de courant électrique. La formule précédente établit une analogie entre la puissance moyenne transportée par les ondes sonores et la puissance moyenne manifestée dans les circuits électriques avec courants alternatifs sinusoïdaux. Toutefois, contrairement à ce dernier cas, la puissance transportée par l'onde sonore n'est pas dissipée (sur des intervalles de temps beaucoup plus petits que l'échelle de temps des transformations irréversibles du gaz isolé perturbé par l'onde sonore).

Un calcul similaire peut aussi se faire avec une onde plane sinusoïdale se propageant vers la gauche [Éqs. (1.22) et (1.27)]. On trouve dans ce cas pour la puissance une valeur négative. Ce résultat est dû au fait que la puissance transportée est une quantité algébrique et son signe dépend du sens de propagation de l'onde.

Une conséquence immédiate du dernier résultat est que *la puissance moyenne (dans le temps) transportée par une onde stationnaire est nulle*. Ceci résulte du fait qu'une onde stationnaire est la superposition de deux ondes planes sinusoïdales d'égales amplitudes (à des signes près) et de même pulsation, se propageant en sens inverses. (Voir aussi début Sect. 3.5.)

## 4.7 Niveau sonore

Les ondes vibratoires qui apparaissent dans les fluides sont appelées sonores car elles sont généralement audibles à l'oreille. Mais la sensibilité physiologique à l'onde sonore dépend fortement de son intensité et de sa fréquence. L'oreille humaine perçoit les sons dont la fréquence est comprise entre 20 Hz et 20000 Hz. Le maximum de sensibilité a lieu pour les fréquences de l'ordre de 4000 Hz.

Pour caractériser l'intensité d'une onde sonore, on établit une échelle de comparaison, en choisissant comme origine l'intensité minimale  $I_0$  perçue par l'oreille humaine (seuil d'audibilité) avec une fréquence de 1000 Hz ;  $I_0$  est égale à  $10^{-12}$  W m<sup>-2</sup>. Le *niveau sonore*  $N$  d'une intensité  $I$  est défini par le logarithme décimal du rapport  $I/I_0$  :

$$N = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right). \quad (4.95)$$

$N$  est exprimé en décibel (dB) et en Bel si le facteur multiplicatif 10 est absent.

Certains ordres de grandeur d'intensités sonores sont les suivantes :

- Seuil d'audibilité à 1000 Hz :  $I = I_0$ ,  $N = 0$ .
- Bruit de fond proche du silence :  $I = 10I_0$ ,  $N = 10$  dB.
- Voix très basse :  $I = 100I_0$ ,  $N = 20$  dB.
- Conversation courante :  $I = 10^5 I_0$ ,  $N = 50$  dB.
- Orchestre symphonique :  $I = 10^{11} I_0$ ,  $N = 110$  dB.
- Seuil de douleur :  $I = 10^{12} I_0$ ,  $N = 120$  dB.

Les normes du travail exigent la protection à partir de 75 dB. Signalons aussi qu'à 4000 Hz, le seuil d'audibilité est inférieure à  $I_0$  ; son niveau sonore est  $N = -7$  dB.

En utilisant les données ci-dessus on peut évaluer les ordres de grandeur de certaines quantités physiques. En considérant une onde sonore dans l'air ( $\rho_0 = 1.3$  kg m<sup>-3</sup>,  $c = 330$  m s<sup>-1</sup>), avec une fréquence de 1000 Hz et une intensité égale à celle du seuil d'audibilité ( $I = I_0$ ), on trouve à partir de l'Éq. (4.90)  $A = A_0 = 10^{-11}$  m. C'est une quantité très petite, inférieure d'un ordre de grandeur aux dimensions atomiques. L'amplitude de la surpression correspondante [Éq. (4.85)] est  $A_p = p_0 = A\omega/(c\chi_S) = A\rho_0 c\omega \simeq 3 \times 10^{-5}$  Pa, qui est  $3 \times 10^9$  fois inférieure à la pression atmosphérique normale ( $= 10^5$  Pa). Pour une conversation à voix haute,  $I = 10^6 I_0$ , par conséquent  $A = 10^3 A_0 = 10^{-8}$  m. Pour le seuil de douleur,  $I = 10^{12} I_0$  et  $A = 10^6 A_0 = 10^{-5}$  m. On voit que dans tous les cas l'amplitude

A reste très petite, ce qui justifie les approximations des petits mouvements adoptées lors des calculs conduisant à l'équation du mouvement.

## 4.8 Réflexion et transmission

Au cours de notre étude des cordes vibrantes nous avons rencontré le phénomène de la réflexion lorsqu'une onde progressive arrivait à une extrémité de la corde (Sect. 2.6). Le même phénomène se rencontre aussi avec les ondes sonores. Dans cette section, nous étudierons une situation plus générale, celle d'une onde progressive arrivant sur la surface de séparation de deux fluides. (Nous supposons que les deux fluides sont séparés par une mince lame matérielle de masse négligeable qui empêche leur mélange sans influencer sur la propagation des ondes.) Dans ce cas, on assiste à deux phénomènes : une réflexion dans le milieu de l'onde incidente et une transmission dans le deuxième milieu. La résolution de ce problème dépend des conditions aux limites imposées aux deux extrémités du tuyau contenant les fluides. Nous allons considérer le cas le plus simple en supposant que l'onde transmise dans le deuxième fluide n'est pas réfléchi à l'autre extrémité du tuyau. Cette situation peut être réalisée en considérant l'ensemble du tuyau comme faisant partie d'un système émetteur-récepteur. L'émetteur, constitué d'un piston par exemple, envoie une onde progressive dans un premier fluide ; celle-ci, après transmission dans le deuxième fluide arrive à l'autre extrémité du tuyau et est complètement absorbée par un récepteur, qui empêche l'apparition de toute réflexion. Un autre moyen pour éviter les effets de la réflexion à cette extrémité du tuyau est de supposer que celui-ci a une longueur très grande, de telle sorte que l'onde transmise, même si elle est réfléchi ultérieurement, mettra un temps très long pour revenir à sa position de départ.

Nous considérons ainsi un tuyau dans lequel se trouvent deux gaz, numérotés 1 et 2, non mélangés à l'état d'équilibre  $(P_0, T_0)$  et dont la surface de séparation se trouve au point d'abscisse  $x_0 = 0$  (voir Fig. 4.9). Les deux gaz ont des masses volumiques, coefficients de compressibilité isentropique et célérités respectifs  $\rho_0, \chi_S, c$  et  $\rho'_0, \chi'_S, c'$ . Une onde incidente, repérée dans la suite par l'indice  $i$ , est envoyée de gauche à droite dans le gaz 1. Elle arrive sur la surface de séparation et se scinde en deux parties : une onde réfléchi, repérée par l'indice  $r$ , qui se propage dans le milieu 1 vers la gauche, et une onde transmise, repérée par l'indice  $t$ , qui se propage dans le milieu 2 vers la droite.

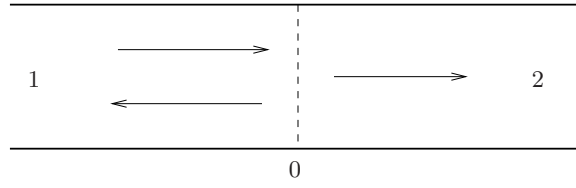


FIGURE 4.9 – Ondes incidente, réfléchie et transmise.

Nous considérons ici le cas d'ondes planes sinusoïdales (Sects. 1.5 et 1.6). En représentation complexe, les ondes incidente, réfléchie et transmise ont la structure suivante [Éqs. (1.25) et (1.27)] :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i(t, x) &= Ae^{i(kx - \omega t + \varphi)}, & k &= \frac{\omega}{c}, \\ \tilde{u}_r(t, x) &= Be^{i(-kx - \omega t)}, \\ \tilde{u}_t(t, x) &= Ce^{i(k'x - \omega t)}, & k' &= \frac{\omega}{c'},\end{aligned}\quad (4.96)$$

où le coefficient  $A$  est réel (la partie complexe de l'amplitude de l'onde incidente étant incorporée dans la constante de phase  $\varphi$ ), tandis que les coefficients  $B$  et  $C$  sont complexes. Le coefficient  $A$  et la constante de phase  $\varphi$  sont supposées être connues à partir des conditions initiales. Les coefficients  $B$  et  $C$  sont les inconnues du problème.

A cause des conditions de raccordement sur la surface de séparation en  $x = 0$ , qui sont valables pour tout  $t$ , les pulsations des ondes réfléchie et transmise doivent être les mêmes que celle de l'onde incidente.

Les ondes dans les milieux 1 et 2 sont décrites par les fonctions  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{u}_2$  :

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_i + \tilde{u}_r, \quad \tilde{u}_2 = \tilde{u}_t. \quad (4.97)$$

Pour déterminer les coefficients  $B$  et  $C$ , il faut utiliser les conditions de raccordement (4.54) et (4.57)-(4.58) sur la surface d'abscisse  $x = 0$ . La condition de continuité du déplacement s'écrit :

$$\tilde{u}_1(t, 0) = \tilde{u}_2(t, 0), \quad (4.98)$$

ce qui donne, après avoir remplacé  $\tilde{u}_1$  et  $\tilde{u}_2$  par leurs expressions :

$$Ae^{i(-\omega t + \varphi)} + Be^{-i\omega t} = Ce^{-i\omega t}, \quad (4.99)$$

$$Ae^{i\varphi} + B = C. \quad (4.100)$$

L'Éq. (4.99) montre encore une fois que la pulsation des ondes dans les deux milieux doit être la même. En effet, si on avait supposé qu'elles étaient différentes, on trouverait dans le deuxième membre de cette équation un facteur  $e^{-i\omega't}$  au lieu de  $e^{-i\omega t}$  ( $\omega' \neq \omega$ ) et l'équation ne pourrait être satisfaite pour tout  $t$ .

La condition de la continuité de la surpression s'écrit :

$$\tilde{p}_1(t, 0) = \tilde{p}_2(t, 0), \quad (4.101)$$

$$-\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial \tilde{u}_1(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{\chi'_S} \frac{\partial \tilde{u}_2(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (4.102)$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{\chi_S} ikAe^{i(kx - \omega t + \varphi)} \Big|_{x=0} - \frac{1}{\chi_S} ikBe^{i(-kx - \omega t)} \Big|_{x=0} = \frac{1}{\chi'_S} ik'Ce^{i(k'x - \omega t)} \Big|_{x=0}, \quad (4.103)$$

$$\frac{k}{\chi_S} (Ae^{i\varphi} - B) = \frac{k'}{\chi'_S} C, \quad (4.104)$$

ou, en éliminant  $k$  et  $k'$  en fonction de  $\omega$ ,  $c$  et  $c'$  :

$$Ae^{i\varphi} - B = \frac{c\chi_S}{c'\chi'_S} C. \quad (4.105)$$

En introduisant la constante  $\gamma$  définie comme suit,

$$\gamma = \frac{c\chi_S}{c'\chi'_S} = \sqrt{\frac{\chi_S}{\rho_0}} \sqrt{\frac{\rho'_0}{\chi'_S}} = \frac{c'\rho'_0}{c\rho_0}, \quad (4.106)$$

l'équation précédente s'écrit aussi :

$$Ae^{i\varphi} - B = \gamma C. \quad (4.107)$$

Les conditions de raccordement ont conduit ainsi à deux équations algébriques, (4.100) et (4.107), qui nous permettent de déterminer  $B$  et  $C$  en fonction de  $A$ ,  $\varphi$  et des autres paramètres du problème :

$$B = \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right) Ae^{i\varphi}, \quad (4.108)$$

$$C = \frac{2}{(1 + \gamma)} Ae^{i\varphi}. \quad (4.109)$$

Les ondes réfléchie et transmise sont ainsi représentées par les fonctions

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r &= \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right) Ae^{i(-kx - \omega t + \varphi)}, \\ \tilde{u}_t &= \frac{2}{(1 + \gamma)} Ae^{i(k'x - \omega t + \varphi)}. \end{aligned} \quad (4.110)$$



En passant à la représentation réelle, on trouve pour les fonctions  $u$  :

$$\begin{aligned} u_i(t, x) &= A \cos(kx - \omega t + \varphi), \\ u_r(t, x) &= \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right) A \cos(-kx - \omega t + \varphi), \\ u_t(t, x) &= \frac{2}{(1 + \gamma)} A \cos(k'x - \omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4.111)$$

Nous pouvons maintenant calculer les puissances transportées par chacune de ces ondes. L'expression générale de la puissance est donnée par l'Éq. (4.79). (Nous rappelons que la représentation complexe ne peut être utilisée que pour les expressions linéaires en  $u$  ; par conséquent, pour le calcul des puissances, il faut revenir à la représentation réelle.)

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(t, x) &= Sp_i v_i = -\frac{S}{\chi_S} \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial t} = SA^2 \frac{k\omega}{\chi_S} \sin^2(kx - \omega t + \varphi), \\ \mathcal{P}_r(t, x) &= Sp_r v_r = -\frac{S}{\chi_S} \frac{\partial u_r}{\partial x} \frac{\partial u_r}{\partial t} = -SA^2 \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2 \frac{k\omega}{\chi_S} \sin^2(-kx - \omega t + \varphi), \\ \mathcal{P}_t(t, x) &= Sp_t v_t = -\frac{S}{\chi'_S} \frac{\partial u_t}{\partial x} \frac{\partial u_t}{\partial t} = SA^2 \left( \frac{2}{1 + \gamma} \right)^2 \frac{k'\omega}{\chi'_S} \sin^2(k'x - \omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4.112)$$

La puissance moyenne est donnée par l'expression (4.80) :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}}_i &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathcal{P}_i(t, 0) = A^2 \frac{k\omega S}{\chi_S T} \int_0^T dt \sin^2(-\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} A^2 \frac{k\omega}{\chi_S} S, \\ \overline{\mathcal{P}}_r &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathcal{P}_r(t, 0) = -A^2 \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2 \frac{k\omega S}{\chi_S T} \int_0^T dt \sin^2(-\omega t + \varphi) \\ &= -\frac{1}{2} A^2 \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2 \frac{k\omega}{\chi_S} S, \\ \overline{\mathcal{P}}_t &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \mathcal{P}_t(t, 0) = A^2 \left( \frac{2}{1 + \gamma} \right)^2 \frac{k'\omega S}{\chi'_S T} \int_0^T dt \sin^2(-\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} A^2 \frac{4}{(1 + \gamma)^2} \frac{k'\omega}{\chi'_S} S. \end{aligned} \quad (4.113)$$

(Le signe moins dans  $\overline{\mathcal{P}}_r$  provient du fait que la puissance transportée est définie algébriquement et tient compte du sens de propagation de l'énergie.)

Calculons maintenant la somme des modules des puissances moyennes réfléchiée et transmise. On trouve :

$$|\overline{\mathcal{P}}_r| + |\overline{\mathcal{P}}_t| = \frac{SA^2}{2} \left[ \left( \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)^2 \frac{k\omega}{\chi_S} + \frac{4}{(1 + \gamma)^2} \frac{k'\omega}{\chi'_S} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{SA^2 \omega^2}{2 c\chi_S} \frac{1}{(1+\gamma)^2} [(1-\gamma)^2 + 4\gamma] \\
&= \frac{SA^2 \omega^2}{2c\chi_S}.
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Cette expression n'est autre que celle de la puissance moyenne de l'onde incidente  $\overline{\mathcal{P}}_i$  [Éq. (4.113)]. Par conséquent, on obtient le résultat :

$$|\overline{\mathcal{P}}_r| + |\overline{\mathcal{P}}_t| = |\overline{\mathcal{P}}_i|, \tag{4.115}$$

qui traduit la loi de conservation de l'énergie. La puissance de l'onde incidente se retrouve sans perte dans les ondes réfléchi et transmise.

Les coefficients de réflexion et de transmission, notés  $R$  et  $T$  et définis comme suit,

$$R = \left| \frac{\overline{\mathcal{P}}_r}{\overline{\mathcal{P}}_i} \right|, \quad T = \left| \frac{\overline{\mathcal{P}}_t}{\overline{\mathcal{P}}_i} \right|, \tag{4.116}$$

nous permettent d'évaluer l'importance relative des puissances réfléchi et transmise par rapport à la puissance incidente. D'après les Éqs. (4.113) et (4.106) on trouve :

$$R = \left( \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \right)^2, \quad T = \frac{4\gamma}{(1+\gamma)^2}. \tag{4.117}$$

Nous notons le fait que  $R$  et  $T$  dépendent des caractéristiques des deux milieux à travers le seul coefficient  $\gamma$ . Nous avons en plus la relation :

$$R + T = 1, \tag{4.118}$$

qui est équivalente à la relation (4.115). D'autre part,  $R$  et  $T$  étant des quantités positives, l'équation précédente montre aussi que  $R \leq 1$  et  $T \leq 1$ .

En remplaçant le coefficient  $\gamma$  par son expression explicite (4.106), les expressions de  $R$  et de  $T$  deviennent :

$$R = \left( \frac{\sqrt{\frac{\rho'_0}{\chi'_S}} - \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}}}{\sqrt{\frac{\rho'_0}{\chi'_S}} + \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}}} \right)^2 = \left( \frac{\rho_0 c - \rho'_0 c'}{\rho_0 c + \rho'_0 c'} \right)^2, \tag{4.119}$$

$$T = \frac{4\sqrt{\frac{\rho'_0}{\chi'_S}} \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}}}{\left( \sqrt{\frac{\rho'_0}{\chi'_S}} + \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_S}} \right)^2} = \frac{4\rho_0 c \rho'_0 c'}{(\rho_0 c + \rho'_0 c')^2}. \tag{4.120}$$

Ces résultats peuvent aussi être exprimés en fonction des impédances (4.93) des deux milieux concernés. On trouve :

$$R = \left( \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2, \quad T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}. \tag{4.121}$$

Le coefficient  $\gamma$  [Éq. (4.106)] joue un rôle analogue à celui de l'indice de réfraction en optique ou en électromagnétisme, ce dernier étant donné par rapport au vide par la formule  $n = c/v$ , où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $v$  sa vitesse dans le milieu diélectrique considéré ; à l'aide des modules des vecteurs d'onde,  $n$  s'exprime aussi sous la forme  $n = k'/k$ . (En électromagnétisme, le coefficient de compressibilité est absent du fait que la propagation des ondes n'y dépend pas du support matériel du milieu.)

Nous pouvons aussi déterminer la *phase relative*, appelée aussi *déphasage*, des ondes réfléchies et transmises par rapport à l'onde incidente. Pour cela on compare au même instant  $t$  l'onde réfléchie ou l'onde transmise à l'onde incidente sur la surface de séparation ( $x = 0$ ) en calculant le rapport des déplacements correspondants et en l'écrivant sous la forme du produit d'un module et de l'exponentielle d'un facteur de phase. Ainsi, pour l'onde réfléchie, il faut exprimer le rapport  $\tilde{u}_r(t, 0)/\tilde{u}_i(t, 0)$  sous la forme  $|D_r|e^{i\psi_r}$  ; la phase  $\psi_r$  détermine le déphasage de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente. Il faut noter que pour ce calcul, les signes moins éventuels qui se trouvent dans les amplitudes devraient être remplacés préalablement par des exponentielles  $e^{i\pi}$ . Dans le cas où on utilise une représentation réelle, il faudrait d'abord exprimer les deux déplacements  $u_i$  et  $u_r$  avec le même type de fonction sinusoïdale (cosinus ou sinus), y absorber les signes moins extérieurs par une phase  $\pi$ , puis comparer les phases des deux fonctions sur la surface de séparation.

En revenant aux Éqs. (4.108)-(4.109), nous observons que le rapport  $C/(Ae^{i\varphi})$  est réel et positif. Par conséquent, l'onde transmise ne subit pas de déphasage par rapport à l'onde incidente, et ceci quelle que soit la valeur de  $\gamma$ . Le rapport  $B/(Ae^{i\varphi})$  est réel, mais son signe dépend de la valeur de  $\gamma$  relativement à 1. Si  $\gamma > 1$ , ce rapport est négatif et par conséquent l'onde réfléchie subit un déphasage de  $\pi$  par rapport à l'onde incidente. Si  $\gamma < 1$ , le rapport est positif et il n'y aura pas de déphasage pour l'onde réfléchie.

A titre d'illustration, nous considérons pour le milieu 1 l'air et pour le milieu 2 trois cas différents de fluides, le gaz carbonique, l'hélium et l'eau. Les valeurs correspondantes des divers coefficients et paramètres sont présentées dans la table 4.1.

Le coefficient  $\gamma$  est supérieur à 1 pour le gaz carbonique et l'eau, par conséquent l'onde réfléchie correspondante subit un déphasage de  $\pi$ . En revanche,  $\gamma < 1$  pour l'hélium, pour lequel l'onde réfléchie ne subit pas de déphasage. Pour le gaz carbonique,  $\gamma$  étant voisin de 1, le coefficient de réflexion est très faible et le coefficient de transmission voisin de 1 :

	air	$CO_2$	$He$	eau
$c$ (m s <sup>-1</sup> )	332	260	972	1400
$\rho_0$ (kg m <sup>-3</sup> )	1,29	1,96	0,18	10 <sup>3</sup>
$\gamma$	1	1,19	0,41	3289
$R$	0	0,0075	0,175	0,9988
$T$	1	0,9925	0,825	0,0012

TABLE 4.1 – Coefficients de réflexion et de transmission pour les ondes incidentes dans l'air.

l'onde est presque entièrement transmise. Pour l'eau, à cause de sa densité très élevée,  $\gamma$  est très grand, ce qui entraîne une valeur très faible de  $T$  : l'onde est presque entièrement réfléchi. Pour l'hélium, la situation est intermédiaire, avec une prépondérance d'ondes transmises.

Les expressions (4.119)-(4.120) de  $R$  et  $T$  sont symétriques par rapport à l'échange des milieux 1 et 2, ou sous l'échange  $\gamma \rightarrow 1/\gamma$  [Éqs. (4.117)]. Si on envoie l'onde incidente à partir du milieu 2, on aura une onde réfléchi dans le milieu 2 et une onde transmise dans le milieu 1. Les expressions de  $R$  et de  $T$  correspondantes seront obtenues à partir des Éqs. (4.119)-(4.120), ou (4.121), en interchangeant les quantités primées et non primées, ou les indices 1 et 2. Mais à cause de la symétrie des coefficients  $R$  et  $T$  sous ces échanges, on retrouve les mêmes expressions que précédemment. Ainsi, si on envoie l'onde incidente à partir de l'eau vers l'air, les coefficients  $R$  et  $T$  auront les mêmes valeurs que celles données dans la table 4.1. L'onde sera presque entièrement réfléchi. En revanche, le rapport  $B/(Ae^{i\varphi})$ , Éq. (4.108), à cause du remplacement  $\gamma \rightarrow 1/\gamma$ , sera positif et l'onde réfléchi dans l'eau ne subira pas de déphasage.

Étudions finalement le comportement des coefficients de réflexion et de transmission par rapport aux propriétés caractéristiques des milieux. Supposons  $\rho_0$  fixe et faisons varier  $\rho'_0$ . Les coefficients de compressibilité isentropique  $\chi_S$  ne dépendent pas, à pression fixe, de la nature détaillée du gaz ; ils dépendent essentiellement du type de liaison interatomique des molécules considérées (monoatomiques, diatomiques, etc. ; cf. Éq. (4.27)) ;  $\chi_S$  et  $\chi'_S$  aussi peuvent être considérés comme fixes. D'après l'Éq. (4.120), le coefficient de transmission  $T$  tend vers zéro (réflexion totale) lorsque le rapport  $\rho'_0/\rho_0$  tend vers l'infini ou

vers zéro. Lorsque le milieu 2 devient très dense, il empêche la pénétration de l'onde incidente; celle-ci est réfléchiée complètement. Cependant, le même phénomène apparaît aussi lorsque le milieu 2 devient très fluide relativement au milieu 1; l'onde incidente est inhibée à traverser la surface de séparation. (Cf. le cas air-eau des exemples précédents.)

Une autre situation correspond au cas où le rapport  $\rho'_0/\chi'_S$  tend vers le rapport  $\rho_0/\chi_S$ . D'après l'Éq. (4.119), le coefficient de réflexion tend vers zéro (transmission totale). Si  $\chi'_S = \chi_S$ , ceci signifie que les densités des deux gaz sont très voisines. L'onde incidente ne trouve pas alors une barrière suffisamment forte ou un fossé suffisamment profond sur la surface de séparation et pénètre sans difficulté dans le deuxième milieu. (Cf. le cas air- $CO_2$  des exemples précédents.)

## 4.9 Effet Doppler

Jusqu'à présent, au cours de nos études, nous avons supposé que le milieu matériel dans lequel les ondes se propageaient était fixe par rapport au référentiel du laboratoire d'observation ou de détection de ces ondes. Ainsi, le tube dans lequel l'onde sonore a été étudiée a été supposé fixe. De même, la corde a été supposée ne pas avoir un mouvement global longitudinal par rapport au laboratoire. Nous avons aussi implicitement supposé que l'observateur ne se déplaçait pas au cours de ses observations. Une situation plus générale résulte lorsque le milieu matériel des ondes ou l'observateur ont un mouvement par rapport au référentiel du laboratoire ou tout simplement ont un mouvement relatif l'un par rapport à l'autre. Dans ce cas, les fréquences enregistrées par l'observateur ne sont pas égales aux fréquences vibratoires de l'onde mesurées dans le référentiel où le milieu est fixe. Ce phénomène est appelé effet Doppler, du nom du physicien C. J. Doppler (1803-1853), qui le mit en évidence avec les ondes sonores. Ce phénomène est d'autre part observé dans la vie courante. Le bruit d'une voiture ou d'une motocyclette qui s'approchent de nous est ressenti différemment lorsqu'elles s'éloignent, le bruit étant plus aigu lors du rapprochement. De même, le sifflement d'un train nous semble plus strident lorsqu'il est en phase de rapprochement que lorsqu'il est arrêté ou est en phase d'éloignement.

L'étude de l'effet Doppler est considérablement simplifiée lorsqu'on assimile l'objet émetteur d'ondes à une source ponctuelle. Celle-ci est supposée émettre des signaux sonores à intervalles réguliers, de période  $T$ , ou plus généralement des ondes sonores

continues de période  $T$ , cette dernière étant déterminée en mesurant par exemple l'intervalle de temps entre deux maxima de l'amplitude de l'onde. Nous considérerons le cas général où la source, notée  $S$ , et l'observateur, noté  $R$  (récepteur), ont des mouvements indépendants, avec des vitesses respectives  $\mathbf{V}_S$  et  $\mathbf{V}_R$  constantes par rapport au référentiel du laboratoire. Nous supposons d'abord que les deux vitesses sont colinéaires suivant l'axe joignant la source à l'observateur. Dans ce cas, les vitesses peuvent être représentées par leurs valeurs algébriques  $V_S$  et  $V_R$  suivant cet axe (voir Fig. 4.10).

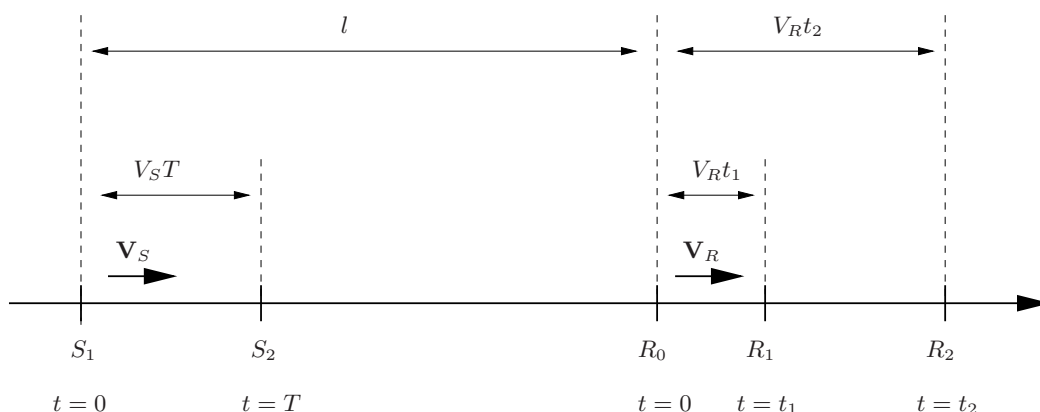


FIGURE 4.10 – La source  $S$  et l'observateur  $R$  sont en mouvement suivant un même axe.

Supposons que la source se trouve à l'instant  $t = 0$  à la position  $S_1$ . A cet instant, l'observateur se trouve à la position  $R_0$ , telle que  $S_1 R_0 = l$ . La source émet à cet instant un signal sonore ou une onde sonore au maximum de son amplitude. La vitesse de l'onde est  $c$ . L'onde va atteindre l'observateur à l'instant  $t = t_1$ . Mais entretemps l'observateur se sera déplacé d'une distance  $R_0 R_1 = V_R t_1$ . La distance parcourue par l'onde est donc  $S_1 R_1 = S_1 R_0 + R_0 R_1 = l + V_R t_1$ . En tenant compte de la vitesse de l'onde, cette distance est égale aussi à  $ct_1$ . D'où l'égalité :

$$ct_1 = l + V_R t_1, \quad (4.122)$$

qui nous donne la valeur de  $t_1$  :

$$t_1 = \frac{l}{c - V_R}. \quad (4.123)$$

Au bout d'une période  $T$ , la source se trouve à la position  $S_2$ , telle que  $S_1 S_2 = V_S T$ . A cet instant ( $t = T$ ) elle émet son deuxième signal ou l'onde à sa nouvelle amplitude

maximale. L'onde va atteindre l'observateur à l'instant  $t_2$ . Entretemps, l'observateur aura parcouru à partir de sa position initiale la distance  $R_0R_2 = V_R t_2$ . D'autre part, la distance  $S_2R_2$  est égale à  $S_1R_0 + R_0R_2 - S_1S_2 = l + V_R t_2 - V_S T$ . Mais la distance  $S_2R_2$  peut aussi s'exprimer en fonction de la vitesse de l'onde. En tenant compte de l'intervalle de temps entre l'instant d'émission de l'onde en  $S_2$  ( $t = T$ ) et l'instant d'arrivée en  $R_2$  ( $t = t_2$ ), nous avons :  $S_2R_2 = c(t_2 - T)$ . Nous obtenons ainsi l'égalité :

$$c(t_2 - T) = l + V_R t_2 - V_S T, \quad (4.124)$$

d'où on déduit la valeur de  $t_2$  :

$$t_2 = \frac{l + (c - V_S)T}{c - V_R}. \quad (4.125)$$

Pour l'observateur, la période  $T'$  de l'onde correspond à la différence entre les deux temps d'enregistrement de l'arrivée de l'onde, c'est-à-dire :

$$T' = t_2 - t_1. \quad (4.126)$$

En remplaçant  $t_2$  et  $t_1$  par leurs expressions, nous trouvons :

$$T' = \frac{l + (c - V_S)T}{c - V_R} - \frac{l}{c - V_R} = T \frac{(c - V_S)}{(c - V_R)}. \quad (4.127)$$

La relation entre la période  $T'$  mesurée par l'observateur en mouvement relatif par rapport à la source et la période  $T$  de l'onde mesurée dans un référentiel où la source est fixe est ainsi :

$$T' = T \frac{(1 - V_S/c)}{(1 - V_R/c)}. \quad (4.128)$$

En introduisant les fréquences respectives  $\nu' = 1/T'$  et  $\nu = 1/T$ , nous obtenons aussi la relation entre les fréquences :

$$\nu' = \nu \frac{(1 - V_R/c)}{(1 - V_S/c)}. \quad (4.129)$$

Nous constatons que lorsque  $V_S$  est positif et  $V_R = 0$ , c'est-à-dire lorsque la source se rapproche de l'observateur,  $\nu' > \nu$ , ce qui est conforme aux observations expérimentales : l'observateur enregistre une plus grande fréquence (son plus aigu). Le même effet se produit lorsque l'observateur se rapproche de la source ( $V_R < 0$  et  $V_S = 0$ ). En revanche, lorsque  $V_S = V_R$  on trouve  $\nu' = \nu$ , ce qui s'explique par le fait que le mouvement relatif de l'observateur et de la source est absent dans ce cas, même si les deux ont un mouvement

de déplacement par rapport au référentiel fixe du laboratoire. Finalement, il faut noter que les relations (4.128)-(4.129) sont indépendantes de la distance existant entre la source et l'observateur et ne dépendent que de leurs vitesses et de la vitesse de l'onde.

On pourrait s'attendre à ce que l'effet Doppler ne dépende que de la vitesse relative ( $\mathbf{V}_S - \mathbf{V}_R$ ) de l'observateur et de la source. Or les Eqs. (4.128)-(4.129) font état de contributions dissymétriques de  $\mathbf{V}_S$  et de  $\mathbf{V}_R$ . Ceci est due à la nature différente des deux types de mouvement. Supposons d'abord l'observateur fixe et la source mobile. Une fois l'onde émise par la source, l'observateur voit l'onde arriver avec une vitesse  $c$ , puisque l'observateur est fixe dans le référentiel du laboratoire et  $c$  représente justement la vitesse de l'onde dans un référentiel fixe ; le fait que la source a une vitesse au moment de l'émission de l'onde n'a pas d'influence sur la vitesse de propagation de l'onde, qui dépend uniquement des propriétés du milieu, lequel est fixe. Supposons maintenant la source fixe et l'observateur mobile avec la vitesse  $V_R$ . Dans ce cas, celui-ci va voir l'onde arriver avec une vitesse  $c - V_R$ . [Cette formule est obtenue en utilisant la loi de composition des vitesses dans le cas des référentiels mobiles. Puisque l'observateur se déplace, son référentiel de mesure est mobile par rapport au référentiel fixe et il faut alors tenir compte de la vitesse de déplacement  $V_R$  du premier par rapport au second.] Ainsi, nous constatons que les deux types de déplacement ne font pas intervenir des expressions symétriques de la vitesse de l'onde relativement à  $\mathbf{V}_S$  et à  $\mathbf{V}_R$ .

En revanche, la situation est complètement différente pour les ondes électromagnétiques. La théorie de l'électromagnétisme est régie par la théorie de la relativité restreinte (en opposition à la relativité de Galilée utilisée en Mécanique non-relativiste). Dans cette théorie, les ondes électromagnétiques peuvent se déplacer indépendamment de tout milieu matériel. Dans le vide, leur vitesse de déplacement est égale à  $c$  (vitesse de la lumière) dans tous les référentiels fixes ou en mouvement avec une vitesse constante. Par conséquent, tous les observateurs enregistrent la même vitesse de déplacement de l'onde et une symétrie complète est établie entre les deux situations source mobile et observateur fixe d'une part et source fixe et observateur mobile de l'autre. Seul le mouvement relatif entre la source et l'observateur intervient dans ce cas.

Les relations (4.128) et (4.129) peuvent aussi se généraliser aux cas où les vitesses de la source et de l'observateur ne sont plus colinéaires à l'axe initial  $S_1R_0$ . Supposons que les vecteurs vitesses  $\mathbf{V}_S$  et  $\mathbf{V}_R$  fassent des angles respectifs  $\theta_S$  et  $\theta_R$  avec l'axe  $S_1R_0$  (voir



Fig. 4.11). Nous représentons par  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire porté par  $S_1R_0$  et dirigé de  $S_1$  vers  $R_0$ . Dans cette situation, les points  $S_2$ ,  $R_1$  et  $R_2$  des instants ultérieurs ne se trouvent plus sur l'axe  $S_1R_0$ , mais sur les axes définis par les vitesses  $\mathbf{V}_S$  et  $\mathbf{V}_R$ .

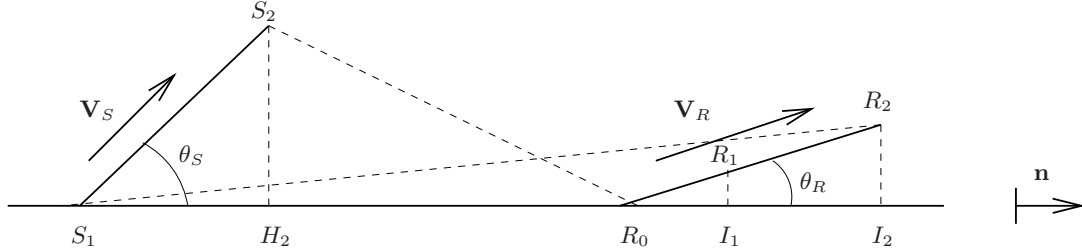


FIGURE 4.11 – La source  $S$  et l'observateur  $R$  ont des vitesses arbitraires dans l'espace.

La résolution exacte de ce problème est compliquée. Néanmoins elle se simplifie lorsque la distance initiale entre la source et l'observateur ( $S_1R_0$ ) est beaucoup plus grande que les distances parcourues par la source et l'observateur pendant des intervalles de temps de l'ordre d'une période ( $T$ ). Dans ce cas, les longueurs  $S_1S_2$ ,  $R_0R_1$  et  $R_0R_2$  sont très petites devant  $l$ . Ceci signifie que les angles  $S_1\widehat{R_0}S_2$ ,  $R_0\widehat{S_1}R_1$  et  $R_0\widehat{S_1}R_2$  sont petits. (Remarque : ne pas confondre ces angles avec  $\theta_S$  et  $\theta_R$ , lesquels sont arbitraires.) Par conséquent, la distance  $S_2R_0$  peut être remplacée en très bonne approximation par la distance  $H_2R_0$ , où  $H_2$  est la projection de  $S_2$  sur l'axe  $S_1R_0$ . De même, les distances  $S_1R_1$  et  $S_1R_2$  peuvent être remplacées par leurs projections  $S_1I_1$  et  $S_1I_2$  sur l'axe  $S_1R_0$ . A partir de là, on se retrouve dans la même situation que celle vue plus haut lorsque la source et l'observateur se déplaçaient sur l'axe  $S_1R_0$ . La seule différence réside dans le fait que suivant cet axe ce ne sont plus les vitesses entières qui interviennent, mais leurs projections  $\mathbf{V}_S \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{V}_S| \cos \theta_S$  et  $\mathbf{V}_R \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{V}_R| \cos \theta_R$ . Les Éqs. (4.128)-(4.129) deviennent :

$$T' = T \frac{(1 - \mathbf{V}_S \cdot \mathbf{n}/c)}{(1 - \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{n}/c)}, \quad (4.130)$$

$$\nu' = \nu \frac{(1 - \mathbf{V}_R \cdot \mathbf{n}/c)}{(1 - \mathbf{V}_S \cdot \mathbf{n}/c)}. \quad (4.131)$$

Elles représentent les lois de transformation des périodes et des fréquences dans le cas général, les quantités primées étant celles mesurées par l'observateur et les quantités non-primées celles mesurées dans un référentiel où la source et l'observateur sont tous les deux fixes.

Lorsque les vitesses de la source et de l'observateur sont petites par rapport à la vitesse de propagation de l'onde ( $|\mathbf{V}_S| \ll c$  et  $|\mathbf{V}_R| \ll c$ ), on peut utiliser l'approximation  $(1 - x)^{-1} \simeq 1 + x$  et les Éqs. précédentes s'écrivent :

$$T' \simeq T \left( 1 - (\mathbf{V}_S - \mathbf{V}_R) \cdot \mathbf{n} / c \right), \quad (4.132)$$

$$\nu' \simeq \nu \left( 1 + (\mathbf{V}_S - \mathbf{V}_R) \cdot \mathbf{n} / c \right). \quad (4.133)$$

Dans cette approximation, la symétrie entre source et observateur est rétablie, puisque seule leur vitesse relative apparaît.

Les Éqs. de transformation (4.130) et (4.131) présentent dans certains cas des comportements singuliers qu'on peut facilement mettre en évidence. En revenant, pour simplifier, au cas de mouvements colinéaires, on voit d'après les Éqs. (4.128)-(4.129) que lorsque la vitesse  $V_R$  de l'observateur s'approche de la vitesse  $c$  de l'onde,  $T'$  tend vers l'infini et  $\nu'$  tend vers 0. Lorsque  $V_R > c$ ,  $T'$  et  $\nu'$  deviennent négatifs, ce qui signifie qu'il n'y a pas de solutions physiques. En effet, dans ce cas, l'observateur se déplace plus rapidement que l'onde et celle-ci ne rattrapera jamais le premier, qui ne constatera pas l'existence de l'onde, sauf s'il en est au courant par d'autres moyens. En revanche, si  $V_R < 0$ , aucun problème ne se pose (et ceci quelle que soit la valeur de  $|V_R|$ ), car dans ce cas l'observateur se dirige vers l'onde et la rencontre aura toujours lieu (le facteur  $(1 - V_R/c)$  étant positif).

Lorsque la vitesse  $V_S$  de la source s'approche de  $c$ ,  $T'$  tend vers 0 et  $\nu'$  tend vers l'infini. Lorsque  $V_S > c$ ,  $T'$  et  $\nu'$  deviennent négatifs, ce qui suggérerait l'absence de solutions physiques. Mais, contrairement au cas rencontré plus haut lorsque  $V_R$  était supérieur à  $c$ , il existe une solution physique nécessitant cependant une analyse détaillée, les Éqs. (4.128)-(4.129) n'étant plus valables pour décrire cette situation. Dans ce cas, la source se déplace plus vite que l'onde et après avoir émis une succession d'ondes elle atteint l'observateur avant celles-ci. Pour comprendre le nouveau phénomène qui se produit, notons d'abord que dans le cas normal ( $V_S < c$ ) les ondes successives émises par la source ne se rattrapent pas au cours du temps. En particulier, l'observateur voit (ou entend) venir ces ondes successivement, dans l'ordre de leur émission. C'est d'ailleurs de cette façon qu'il mesure la période et la fréquence de l'onde émise. Dans le cas actuel, du fait que  $V_S > c$ , les ondes successives émises se chevauchent et se rattrapent et arrivent, après la source, presque simultanément auprès de l'observateur qui n'a plus la possibilité de les distinguer et verra apparaître une immense onde formée de l'ensemble des ondes émises. Le passage de cette

onde sonore provoque dans le voisinage de l'observateur une forte explosion et l'onde correspondante est appelée *onde de choc* ou *onde de Mach*. Après le passage de la source, celle-ci s'éloigne de l'observateur et la situation redevient normale, les Éqs. (4.128)-(4.129) pouvant de nouveau être appliquées. ( $V_S$  est alors négatif, car les vecteurs  $\mathbf{V}_S$  et  $\mathbf{n}$  ont des sens opposés.) Dans la vie courante, des ondes de choc sont observées lors du passage des avions supersoniques. On les observe aussi dans le sillage des hors-bord, lorsque leur vitesse dépasse celle des ondes se déplaçant à la surface de l'eau.

On peut mieux analyser le phénomène de l'onde de choc si on étudie le problème dans l'espace à trois dimensions ou dans un plan. On appelle *surface d'onde* toute surface sur laquelle la fonction de vibration  $u$  prend la même valeur à un instant donné arbitraire. Les surfaces d'ondes des ondes sinusoïdales émises par une source ponctuelle dans un milieu homogène sont des sphères (ou des cercles dans le plan) ayant pour centre la source ; les ondes correspondantes sont appelées ondes sphériques (ou circulaires).

Nous avons représenté sur la Fig. 4.12 la propagation de quelques surfaces d'ondes circulaires typiques, émises à intervalles réguliers entre les instants 0 (position  $S_0$  de la source) et  $t$  (position  $S$ ) dans le cas où la source a une vitesse  $V_S$  inférieure à  $c$ . Nous constatons que les surfaces d'ondes émises à des instants différents ne se chevauchent pas. Les surfaces d'ondes sont plus resserrées du côté du déplacement de la source. Si l'observateur (fixe) se trouve à droite de la source (rapprochement), il mesurera une période  $T'$  inférieure à  $T$ . En revanche, s'il se trouve à gauche de la source (éloignement), il mesurera une période  $T'$  supérieure à  $T$ .

La Fig. 4.13 correspond au cas où la source a une vitesse  $V_S$  supérieure à  $c$ . La source se trouve à la position  $S_0$  à l'instant 0 et à la position  $S$  à l'instant  $t$ . Nous constatons que les surfaces d'ondes émises dans cet intervalle de temps se chevauchent. A l'instant  $t$ , toutes les surfaces d'ondes sont tangentes aux deux droites passant par  $S$  et faisant un angle  $\alpha_c$  avec la direction de déplacement de la source.  $\alpha_c$  est donné par la formule suivante :

$$\sin \alpha_c = \frac{c}{V_S}. \quad (4.134)$$

Suivant ces droites, les ondes auront une interférence constructive maximale, donnant lieu à une onde résultante avec une amplitude amplifiée considérablement. Cette onde est appelée *onde de choc*. Si, à l'instant  $t$ , l'observateur se trouve sur l'une de ces droites, il entendra l'onde résultante arriver dans une forte explosion. (Dans l'espace, ces deux

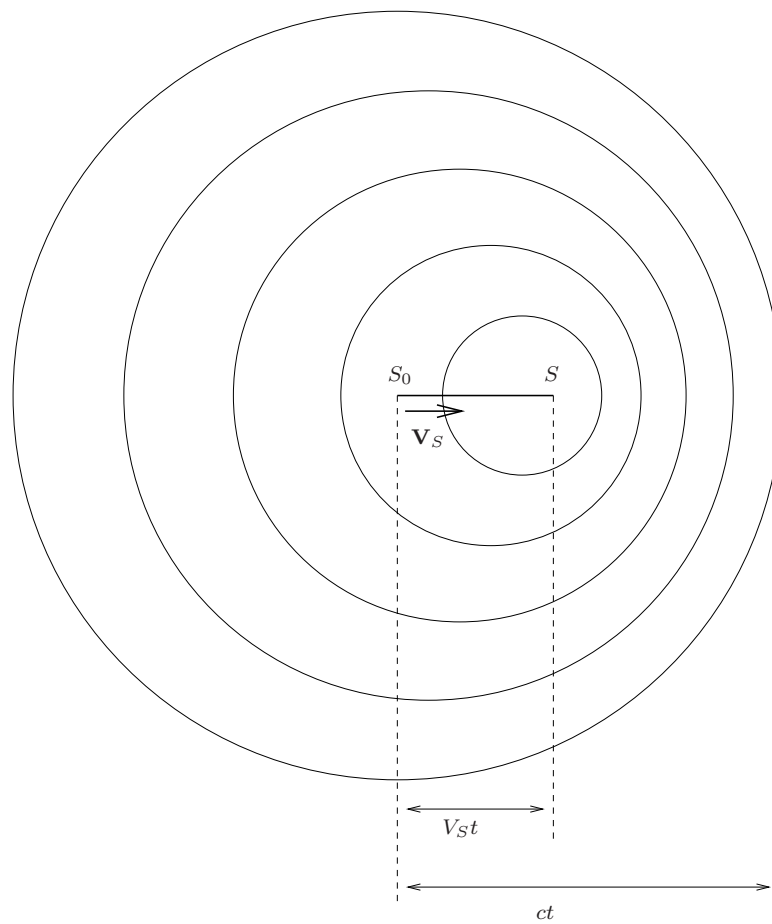


FIGURE 4.12 – La source  $S$  a une vitesse  $V_S$  inférieure à la vitesse  $c$  de l'onde.

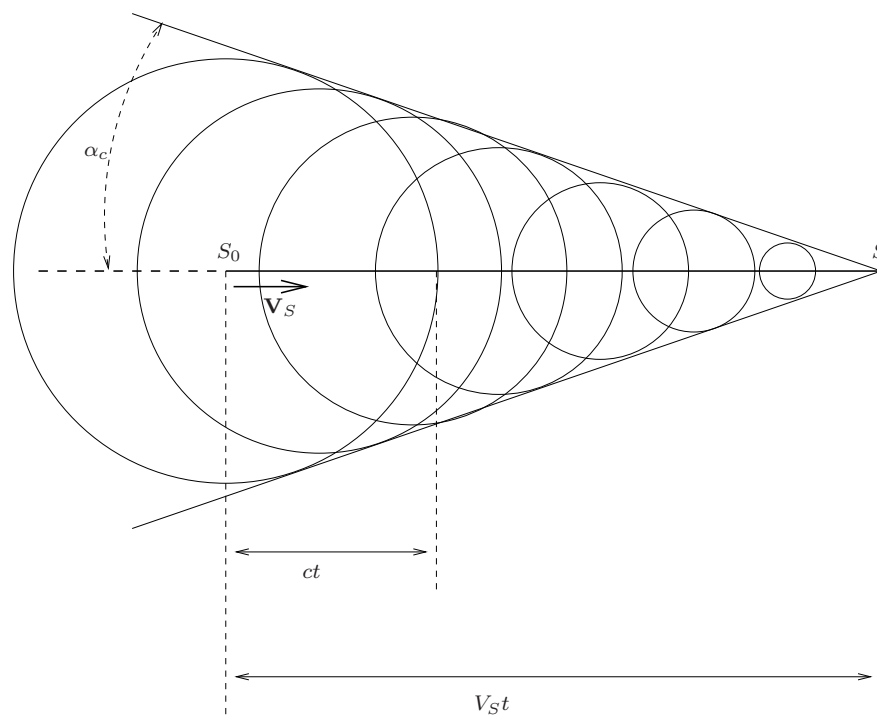


FIGURE 4.13 – L'onde de choc. La source  $S$  a une vitesse  $V_S$  supérieure à la vitesse  $c$  de l'onde.

droites sont remplacées par un cône de demi-angle au sommet  $\alpha_c$ .) L'instant  $t$  étant arbitraire, on peut répéter la construction de la Fig. 4.13 à tous les instants, c'est-à-dire pour toutes les positions de la source  $S$ . Il est clair qu'il existe un instant  $t$  pour lequel l'observateur se trouvera dans le voisinage d'une telle droite si la vitesse initiale de la source est dirigée dans sa direction.

Le cas où  $V_S = c$  représente un cas particulier important. Toutes les ondes émises par la source entre la position  $S_0$  et la position  $S$  arrivent en  $S$  au même instant, en même temps que la source. L'effet d'interférence constructive est alors maximal. ( $\alpha_c = \pi/2$ .)

Du point de vue pratique, l'effet Doppler est utilisée pour la mesure des vitesses des objets se trouvant hors de portée d'une mesure directe. En envoyant des ondes vers ces objets et en captant les ondes réfléchies, ou en captant directement les ondes émises par ces objets, on peut déterminer la vitesse  $V_S$  si on arrive à mesurer la fréquence de ces ondes et à la comparer à la fréquence que ces ondes auraient si la source était fixe. On peut citer comme applications de ce principe, la mesure de la vitesse des voitures par les radars, la mesure de la vitesse des globules du sang par l'utilisation de lasers et la mesure de la vitesse des étoiles par l'analyse du spectre des raies de la lumière émise. C'est ainsi que dans ce dernier domaine d'applications, l'observation du décalage vers le rouge du spectre des raies de la lumière émise par les galaxies lointaines a conduit les physiciens à la conclusion que les galaxies s'éloignent les unes des autres et que l'univers est en expansion. En outre, la vitesse d'éloignement est ici une fonction croissante (linéaire) de la distance entre les galaxies. Elle est de l'ordre de 25 km/s pour une distance de 1 million d'années-lumière.

# Chapitre 5

## Ondes optiques

### 5.1 Ondes électromagnétiques et ondes optiques

Les ondes électromagnétiques appartiennent à la catégorie des ondes qui, pour se propager ou se manifester, n'ont pas besoin de support matériel. Elles ne sont pas dues aux excitations ou aux déformations d'un milieu préexistant, mais représentent plutôt la propagation de quantas d'énergie, appelés photons, qui peuvent se manifester même dans le vide. La théorie de l'électromagnétisme, développée par J. C. Maxwell (1831-1879) en 1865, a unifié les théories existantes de l'électrostatique et de la magnétostatique en tenant compte des phénomènes variables dans le temps. C'est A. Einstein (1879-1955), qui a complété, en 1905, par la théorie de la relativité, l'interprétation physique de la théorie de l'électromagnétisme.

Les équations de Maxwell concernent le champ électrique  $\mathbf{E}$  et le champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$ . Leur structure mathématique est telle que, dans les régions ne contenant pas de charges ou de courants électriques, elles se ramènent à l'équation de d'Alembert à trois dimensions d'espace. Par conséquent, elles prédisent l'existence d'ondes électromagnétiques dont les propriétés de propagation seront similaires à celles qu'on rencontre sur les cordes vibrantes ou dans les milieux acoustiques. On peut donc appliquer à ces ondes la même analyse utilisée dans le cas des ondes nécessitant un milieu matériel. La seule différence entre les deux types d'ondes est que les équations des ondes électromagnétiques sont des équations exactes de la physique classique (si on néglige les effets de la gravitation), alors que les équations des ondes avec support matériel sont des équations

approchées, obtenues avec l'approximation des petits mouvements.

Sur le plan expérimental, c'est le physicien H. Hertz (1857-1894) qui le premier a mis en évidence l'existence d'ondes électromagnétiques.

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide est :

$$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \quad (5.1)$$

dont l'ordre de grandeur est beaucoup plus grand que celui des ondes des cordes vibrantes ou des ondes sonores (de quelques dizaines à quelques centaines de mètres par seconde).

Les fréquences que peuvent avoir les ondes périodiques électromagnétiques varient entre zéro et  $10^{22}$  Hz. *Les ondes optiques*, ou ondes lumineuses, sont des ondes électromagnétiques visibles par l'œil humain. Le domaine de variation de leurs fréquences est :

$$3,8 \times 10^{14} \text{ Hz} \leq \nu \leq 7,8 \times 10^{14} \text{ Hz}, \quad (5.2)$$

la borne inférieure correspondant à la lumière rouge et la borne supérieure à la lumière violette. On constate que ce domaine de fréquences est extrêmement petit comparé au domaine total des fréquences possibles des ondes électromagnétiques. Ce domaine peut aussi être exprimé en fonction des longueurs d'onde des ondes planes sinusoïdales correspondantes :

$$780 \times 10^{-9} \text{ m} \geq \lambda \geq 390 \times 10^{-9} \text{ m}. \quad (5.3)$$

La vitesse des ondes sur les cordes vibrantes et des ondes sonores fut obtenue à partir des caractéristiques physiques du milieu correspondant : tension de la corde et masse linéique pour la corde vibrante [Éq. (2.14)], coefficient de compressibilité isentropique et masse volumique pour les ondes sonores [Éq. (4.46)]. Quelles sont les grandeurs qui déterminent la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide? La théorie de l'électromagnétisme dans le vide contient essentiellement deux paramètres. Le premier est  $\varepsilon_0$ , la permittivité électrique du vide, qui intervient notamment en électrostatique dans la loi de Coulomb, donnant le champ électrique dans l'espace créé par une distribution de charges, et le théorème de Gauss ; sa valeur est donnée par  $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \times 10^9$  USI. Le deuxième est  $\mu_0$ , la perméabilité magnétique du vide, qui intervient notamment dans la loi de Biot et Savart, donnant le champ d'induction magnétique dans l'espace créé par une distribution de courants électriques, et le théorème d'Ampère ; sa valeur est donnée par  $\mu_0/(4\pi) = 10^{-7}$  USI. Les équations de Maxwell prédisent pour la vitesse des ondes



électromagnétiques dans le vide la relation

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}. \quad (5.4)$$

En y remplaçant  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$  par leur valeur numérique, on trouve pour  $c$  la valeur donnée par l'Éq. (5.1), qui correspond à la valeur expérimentale mesurée. C'est l'une des prédictions majeures des équations de Maxwell.

Nous étudierons, au cours de ce chapitre et du suivant, certaines propriétés des ondes optiques et notamment l'approximation de l'optique géométrique et le phénomène d'interférence. Beaucoup de résultats établis seront aussi valables pour d'autres ondes électromagnétiques, mais les appareils expérimentaux nécessaires pour tester et vérifier les propriétés des ondes optiques sont plus faciles à mettre en place qu'avec d'autres types d'ondes électromagnétiques.

Au cours de notre étude, nous aurons besoin de généraliser certains résultats obtenus dans le cas unidimensionnel au cas tridimensionnel d'espace.

## 5.2 Ondes tridimensionnelles

Les ondes électromagnétiques représentent la propagation du champ électrique  $\mathbf{E}$  et du champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$ , qui sont des grandeurs vectorielles. Toutefois, de nombreuses propriétés de ces ondes peuvent être établies sans tenir compte de leur nature vectorielle, en remplaçant les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  par une grandeur scalaire  $u$ . Nous adopterons désormais cette simplification. La grandeur scalaire  $u$  représentera l'un ou l'autre des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Du point de vue expérimental, elle sera mesurable à travers l'intensité de l'onde électromagnétique, qui est l'analogie de l'intensité sonore (Sects. 4.6 et 4.7). En particulier, pour les ondes optiques, l'intensité lumineuse, à laquelle l'œil est sensible, donne une mesure de la valeur moyenne dans le temps du carré du module de  $u$ .

Comme les ondes électromagnétiques se propagent dans toutes les directions d'espace, il est nécessaire d'utiliser l'équation de d'Alembert à laquelle satisfait  $u$  dans le cas tridimensionnel. Dans ce cas,  $u$  sera une fonction du temps  $t$  et des trois coordonnées d'espace  $x, y, z$  :

$$u = u(t, x, y, z). \quad (5.5)$$

L'équation de d'Alembert à trois dimensions d'espace s'écrit :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (5.6)$$

En définissant *l'opérateur laplacien*, ou le laplacien, par la relation

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (5.7)$$

l'Éq. (5.6) se réécrit sous une forme plus compacte :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u. \quad (5.8)$$

Pour traiter les problèmes tridimensionnels, il est souvent avantageux d'utiliser une notation vectorielle. Pour cela, nous introduisons les vecteurs de base cartésienne orthonormés de l'espace tridimensionnel,  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ , vérifiant les propriétés (3.34). Le vecteur position  $\mathbf{r}$  se décompose sur cette base suivant la loi (3.35), faisant intervenir ses composantes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z. \quad (5.9)$$

On peut aussi écrire  $u$  sous la forme

$$u = u(t, \mathbf{r}). \quad (5.10)$$

Dans le calcul vectoriel, l'opérateur de dérivation fondamental est *l'opérateur gradient*, défini comme suit :

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (5.11)$$

Le gradient d'une fonction scalaire  $f(\mathbf{r})$  est obtenu en appliquant l'opérateur gradient sur  $f$  :

$$\nabla f = \mathbf{e}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (5.12)$$

On vérifie que le carré de l'opérateur gradient est l'opérateur laplacien :

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta. \quad (5.13)$$

Une onde plane sera caractérisée par la direction d'un vecteur unitaire  $\mathbf{e}_k$  suivant laquelle elle se propage. Dans un plan orthogonal à  $\mathbf{e}_k$ ,  $u$  prend la même valeur à un instant donné. Pour avoir l'expression d'une onde plane sinusoïdale, appelée aussi onde plane *monochromatique*, il suffit de remplacer dans les expressions déjà rencontrées dans

le cas unidimensionnel la quantité  $kx$  par le produit scalaire  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ , en faisant intervenir un vecteur  $\mathbf{k}$  suivant la direction  $\mathbf{e}_k$  :

$$\mathbf{k} = k\mathbf{e}_k, \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (5.14)$$

Le vecteur  $\mathbf{k}$ , appelé *vecteur d'onde*, a la décomposition suivante sur la base du référentiel  $Oxyz$  :

$$\mathbf{k} = k_x\mathbf{e}_x + k_y\mathbf{e}_y + k_z\mathbf{e}_z. \quad (5.15)$$

Le produit scalaire  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  a la décomposition

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z. \quad (5.16)$$

On peut maintenant vérifier que la fonction

$$u(t, \mathbf{r}) = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi), \quad (5.17)$$

où  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  sont des constantes réelles, avec  $\omega > 0$ , et  $\mathbf{k}$  un vecteur constant, est solution de l'équation de d'Alembert (5.6). Il est facile de voir que  $u$  vérifie les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u, \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k_x^2 u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -k_y^2 u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -k_z^2 u. \quad (5.19)$$

En utilisant ces résultats dans l'Éq. (5.6) et le fait que

$$\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2, \quad (5.20)$$

on trouve que l'Éq. (5.6) est satisfaite si  $\mathbf{k}^2 = \omega^2/c^2$ , ou ce qui est équivalent

$$k = |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}. \quad (5.21)$$

On retrouve ainsi la relation de dispersion obtenue dans le cas unidimensionnel, mais cette fois avec le module du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ .

Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , qui est porté par le vecteur unitaire  $\mathbf{e}_k$  [Éq. (5.14)], donne ainsi le sens de propagation de l'onde.  $\mathbf{k}$  est orthogonal à la surface d'onde, qui est ici un plan. (D'après l'expression (5.17),  $u$  dépend de  $\mathbf{r}$  à travers sa projection sur  $\mathbf{k}$ ; les composantes de  $\mathbf{r}$  orthogonales à  $\mathbf{k}$  n'interviennent pas dans  $u$ ; par conséquent,  $u$  reste constante sur tout plan orthogonal à  $\mathbf{k}$ .)

En représentation complexe (Sect. 1.6), l'onde précédente s'écrit :

$$\tilde{u}(t, \mathbf{r}) = Ae^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi)}. \quad (5.22)$$

L'action de l'opérateur gradient sur  $\tilde{u}$  peut se calculer facilement en utilisant la décomposition (5.16) :

$$\nabla \tilde{u} = i\mathbf{k}\tilde{u}. \quad (5.23)$$

Par conséquent,  $i\mathbf{k}$  est le vecteur propre de l'opérateur gradient et  $\tilde{u}$  en est la fonction propre.

L'action de l'opérateur gradient sur l'onde plane en représentation réelle est légèrement plus compliquée :

$$\nabla u = -\mathbf{k}A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi). \quad (5.24)$$

Le résultat qu'il faut retenir des Éqs. (5.23)-(5.24) est que l'action de l'opérateur gradient sur l'onde plane produit un vecteur porté par le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et par conséquent orthogonal à la surface d'onde.

### 5.3 Ondes sphériques

Dans l'espace tridimensionnel, les ondes sphériques jouent aussi un rôle important. Ce sont des ondes dont les surfaces d'onde sont des sphères, dont le centre correspond en général à la position de la source (ponctuelle) qui leur a donné naissance. La figure 1.6 donne une représentation d'ondes sphériques, en la considérant comme celle d'une coupe transversale passant par le centre.

Afin d'étudier les propriétés des ondes sphériques, il est indiqué d'utiliser les coordonnées sphériques.  $r$  étant le module de  $\mathbf{OM} = \mathbf{r}$ , on a (Fig. 5.1) :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, & 0 &\leq \theta \leq \pi, & r &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Les vecteurs de base des coordonnées sphériques sont les vecteurs unitaires orthonormés  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  qui forment une base mobile se déplaçant avec le point  $M$  considéré. Le vecteur  $\mathbf{e}_r$  est porté par  $\mathbf{r}$ ; le vecteur  $\mathbf{e}_\theta$  est tangent au cercle généré par la rotation en  $\theta$  et se trouve dans le plan  $(\mathbf{OM}, Oz)$ ; le vecteur  $\mathbf{e}_\varphi$  est dans le plan parallèle au plan  $Oxy$  et est tangent au cercle généré par la rotation en  $\varphi$ .

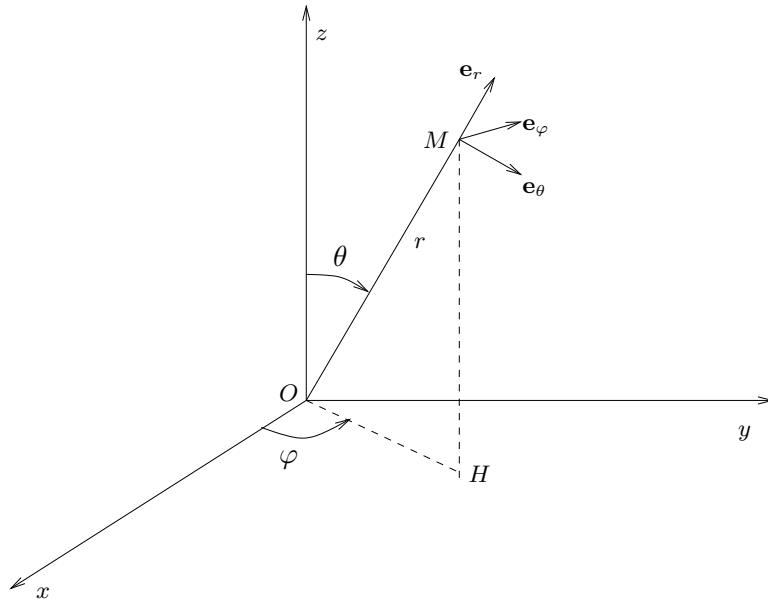


FIGURE 5.1 – Les coordonnées sphériques.

L'opérateur laplacien en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (5.26)$$

On est intéressé par les ondes possédant une symétrie sphérique, c'est-à-dire ne dépendant pas des directions d'espace, donc de  $\theta$  et de  $\varphi$  :

$$u = u(t, r). \quad (5.27)$$

Dans ce cas, les parties de l'opérateur laplacien agissant sur  $\theta$  et  $\varphi$  donnent zéro et l'action du laplacien sur  $u$  se réduit à celle du premier terme :

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r u. \quad (5.28)$$

En faisant le changement de fonction

$$u(t, r) = \frac{f(t, r)}{r}, \quad (5.29)$$

on trouve :

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}. \quad (5.30)$$

En reportant l'expression (5.29) de  $u$  dans l'Éq. (5.8), on obtient pour  $f$  :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}. \quad (5.31)$$

Cette équation est formellement identique à l'équation de d'Alembert à une dimension d'espace que nous avons rencontrée avec les cordes vibrantes et les ondes sonores [Éqs. (2.15) et (4.47)]. La seule différence est que la variable  $r$  prend ici uniquement des valeurs positives. L'équation peut être résolue avec la même méthode que celle de la section 2.4. On trouve :

$$f(t, r) = F(r - ct) + G(r + ct), \quad (5.32)$$

où  $F$  et  $G$  sont des fonctions arbitraires. Pour  $u$ , on a :

$$u(t, r) = \frac{1}{r} (F(r - ct) + G(r + ct)). \quad (5.33)$$

La fonction  $F(r - ct)$  représente une onde qui se propage vers les  $r$  croissants ; il s'agit donc d'une onde qui part d'une source et se répand dans tout l'espace avec des surfaces sphériques de plus en plus grandes ; elle est appelée onde sortante ou onde divergente. La fonction  $G(r + ct)$  représente une onde qui se propage vers les  $r$  décroissants, c'est-à-dire des  $r$  qui s'approchent de zéro ; il s'agit donc d'une onde qui converge vers un point ; elle est appelée onde entrante ou onde convergente. (Elle peut par exemple être produite par une lentille convergente.) En nous limitant ici aux ondes sortantes, l'expression de la fonction  $u$  devient :

$$u(t, r) = \frac{1}{r} F(r - ct). \quad (5.34)$$

On vérifie explicitement que lorsque  $t$  est fixé, la valeur de  $u$  reste inchangée si on se déplace sur la sphère de rayon  $r$ . Lorsque  $r$  augmente, le facteur  $1/r$  dans l'expression de  $u$  atténue sa valeur. Ce phénomène reflète la loi de conservation de l'énergie. L'onde sphérique transporte de l'énergie qui est conservée et qui est répartie sur la surface de la sphère. Comme celle-ci augmente comme  $r^2$  avec  $r$ , la densité surfacique d'énergie diminue comme  $r^{-2}$ . Les densités d'énergie et de puissance étant des fonctions quadratiques de  $u$  (Sect. 4.6), celle-ci diminue comme  $r^{-1}$ , ce qui est conforme au comportement indiqué par l'Éq. (5.34).

On peut spécifier l'expression de la fonction  $F$  pour les ondes sinusoïdales ou monochromatiques. Dans ce cas,  $u$  vérifie l'équation (5.18), dont la solution, en représentation complexe est  $g(r)e^{-i\omega t}$ . Comme  $t$  apparaît dans  $F$  avec la combinaison  $(r - ct)$ , en définissant

le module d'un vecteur d'onde par

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad (5.35)$$

on trouve pour  $\tilde{u}$  l'expression :

$$\tilde{u} = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t)}, \quad (5.36)$$

où  $A$  est une constante complexe. On peut aussi vérifier directement que cette expression, avec la propriété (5.28) et la définition (5.35), est solution de l'Éq. (5.8). On trouve ainsi une expression qui est très proche de celle d'une onde plane sinusoidale [Éq. (5.22)], avec la différence que c'est le module  $k$  du vecteur d'onde qui apparaît dans l'onde sphérique.

Peut-on définir un vecteur d'onde à partir du module  $k$ ? Pour cela, on peut procéder comme dans le cas des ondes planes, en calculant l'action de l'opérateur gradient sur  $\tilde{u}$ . L'opérateur gradient en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (5.37)$$

Lorsqu'on l'applique sur une fonction dépendant seulement de  $r$ , les deux derniers termes de l'opérateur n'interviennent pas. En l'appliquant sur la fonction  $\tilde{u}$  donnée par l'Éq. (5.36), on trouve :

$$\nabla \tilde{u} = \mathbf{e}_r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \mathbf{e}_r \left( ik - \frac{1}{r} \right) \tilde{u}. \quad (5.38)$$

Le résultat est un vecteur porté par  $\mathbf{e}_r$ , qui est orthogonal à la surface de la sphère, donc à la surface d'onde; il représente en même temps la direction de propagation de l'onde au point considéré. L'analogie avec le cas des ondes planes serait accentuée si on pouvait négliger dans le dernier terme le facteur  $1/r$  devant  $ik$ . En remplaçant  $k$  en fonction de la longueur d'onde  $\lambda$  [Éq. (1.18)], il faut comparer  $2\pi/\lambda$  à  $1/r$ . Or, pour les ondes considérées,  $r$  est une quantité macroscopique qui est de l'ordre du mm, cm, m ou km. Pour les ondes optiques [Éq. (5.3)],  $\lambda$  est de l'ordre de  $10^{-7}$  m. On constate que le facteur  $1/r$  est complètement négligeable devant  $ik$ . L'équation (5.38) devient :

$$\nabla \tilde{u} = ik \mathbf{e}_r \tilde{u}. \quad (5.39)$$

On peut alors définir, par analogie avec l'Éq. (5.23), un vecteur d'onde de module  $k$  constant, donné par la relation

$$\mathbf{k}(\theta, \varphi) = k \mathbf{e}_r(\theta, \varphi). \quad (5.40)$$

Ce vecteur est orthogonal à la surface d'onde sphérique et donne le sens de propagation de l'onde au point considéré. Mais, contrairement au cas de l'onde plane, il n'est pas de direction constante ; sa direction varie d'un point à l'autre de la surface (Fig. 5.2).

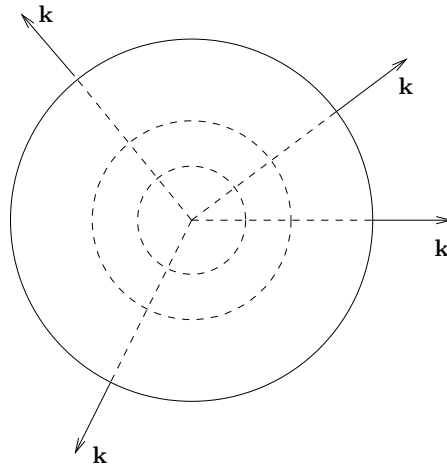


FIGURE 5.2 – Onde sphérique et certains de ses vecteurs d'onde.

## 5.4 Théorème de Malus

Nous avons vu dans les Sects. 5.2 et 5.3 que le gradient des ondes planes et des ondes sphériques était un vecteur orthogonal à la surface d'onde et que celui-ci représentait en même temps la direction de propagation de l'onde en chacun de ses points. Ce résultat est tout à fait général et reste valable avec toute forme de surface d'onde. Nous montrerons d'abord dans cette section la validité de cette assertion.

Considérons une fonction scalaire arbitraire de  $\mathbf{r}$ ,  $f = f(\mathbf{r})$ , et calculons sa différentielle totale. Celle-ci provient des variations infinitésimales de ses arguments (voir Sect. 2.4) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (5.41)$$

[Cette formule est une généralisation au cas tridimensionnel des Éqs. (2.30) et (2.31).] En remarquant que la différentielle du vecteur position  $\mathbf{r}$  est égale à

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad (5.42)$$



(les vecteurs de base cartésienne  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  étant constants), on peut voir que  $df$  est égale au produit scalaire du gradient de  $f$  avec  $d\mathbf{r}$  :

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.43)$$

Nous appliquons maintenant ce résultat au cas d'une surface d'onde  $\Sigma(t)$ , dont l'expression est donnée par une valeur constante de  $u$  à  $t$  fixé. La variation de  $u$  à  $t$  fixée sur la surface d'onde étant nulle par définition, on obtient :

$$du|_{\Sigma(t)} = \nabla u \cdot d\mathbf{r}|_{\Sigma(t)} = 0. \quad (5.44)$$

Or  $d\mathbf{r}$  représente un déplacement infinitésimal de  $\mathbf{r}$  sur la surface d'onde ;  $d\mathbf{r}$  est donc dans le plan tangent à la surface d'onde au point  $\mathbf{r}$  considéré. L'équation (5.44) signifie que le gradient de  $u$  est orthogonal à la surface d'onde en chacun de ses points (Fig. 5.3).

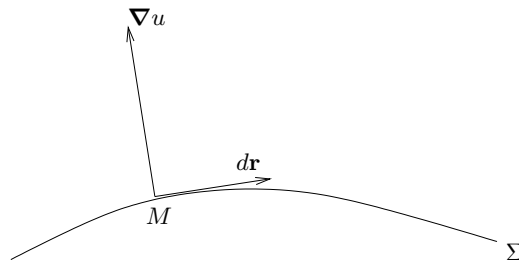


FIGURE 5.3 – Une surface d'onde et le gradient de  $u$  en un point.

L'intérêt de ce résultat vient du fait que le gradient de  $u$  donne en même temps la direction de propagation de l'onde. Cette propriété était évidente avec les ondes planes et sphériques, puisque dans ces deux cas l'onde se propage manifestement suivant la direction orthogonale à la surface d'onde. Reste-t-elle une propriété générale ? La réponse à cette question est positive. Pour la démontrer, on doit avoir recours au phénomène de transport d'énergie, que nous avons déjà rencontré avec les ondes sonores (Sect. 4.6), car c'est la propagation de l'énergie qui donne la direction physique de la propagation de l'onde.

Lorsqu'une onde est tridimensionnelle et peut se propager suivant des directions arbitraires, l'étude du transport de l'énergie nécessite l'introduction d'une *densité de courant d'énergie* en chaque point de l'espace et à chaque instant, que nous désignerons par  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$  (à ne pas confondre avec la puissance transportée  $\mathcal{P}$ ) ; il s'agit d'une énergie par unité de

volume (d'où le terme densité) multipliée par son vecteur vitesse de propagation (c'est donc un vecteur). La puissance transportée par l'onde à travers une surface  $S$  à un instant  $t$  donné est égal au flux de  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$  à travers  $S$ ; le flux est égal au produit scalaire de  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$  avec l'élément de surface orienté  $d\mathbf{S}$  (perpendiculairement à la surface), intégré sur toute la surface  $S$  :

$$\mathcal{P}(t, S) = \int_S \mathbf{P}(t, \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.45)$$

L'équation (4.79) que nous avons trouvée dans le cas des ondes sonores est une application de cette formule au cas particulier des ondes planes traversant perpendiculairement une surface  $S$ . L'équation (4.79) nous permet cependant de trouver la structure générale du vecteur  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$ . L'expression unidimensionnelle de celui-ci est obtenu à partir de l'Éq. (4.79) en factorisant l'aire  $S$ . Dans le cas unidimensionnel, l'expression de  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$  se réduit donc à  $(-\frac{1}{\chi_s} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t})$  pour les ondes sonores. En remarquant que le passage au cas tridimensionnel s'effectue en remplaçant  $\frac{\partial u}{\partial x}$  par le gradient de  $u$ , on trouve pour l'expression générale de la densité de courant d'énergie :

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = -C(\nabla u) \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (5.46)$$

où  $C$  est une constante positive, dépendant des caractéristiques (connues) du milieu considéré. Nous constatons que la direction de  $\mathbf{P}(t, \mathbf{r})$  est justement donné par le gradient de  $u$ . Ceci démontre la propriété générale que *l'énergie, et donc l'onde, se propage en chaque point de l'espace suivant la direction donnée par le gradient de  $u$  en ce point*. Comme on a trouvé plus haut que le gradient de  $u$  est orthogonal à la surface d'onde, ceci entraîne aussi que *la surface d'onde se propage orthogonalement à elle-même en chacun de ses points*.

Pour trouver à partir d'une surface d'onde initiale sa position après un intervalle de temps infinitésimal, il suffit de tracer à partir de quelques points de la surface des segments de droite orthogonaux à la surface et puis de tracer la nouvelle surface orthogonale aux autres extrémités des segments. Les lignes droites qui joignent des surfaces d'onde successives sont appelées *rayons*. Les points successifs qui se trouvent sur un même rayon et sur des surfaces d'onde successives sont appelés *points correspondants*. Nous avons représenté sur la figure 5.4 des surfaces d'onde planes, sphériques et arbitraires, avec leurs rayons et les points correspondants,  $AA'A''$ ,  $BB'B''$ , etc.

Lorsqu'un milieu est homogène et isotrope, les rayons qui joignent les surfaces d'onde

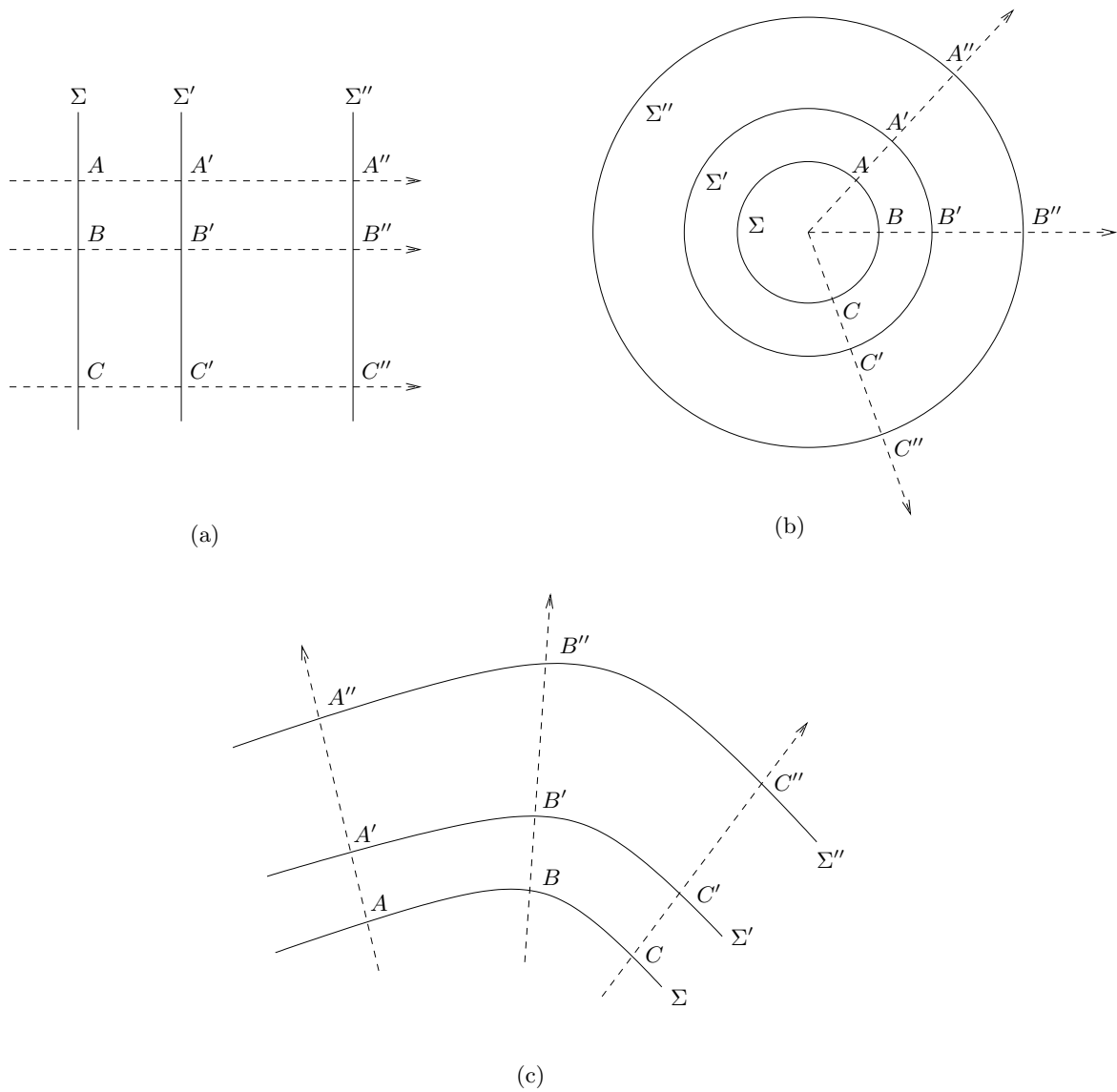


FIGURE 5.4 – Surfaces d'onde planes (a), sphériques (b) et arbitraires (c), avec leurs rayons et points correspondants,  $AA'A''$ ,  $BB'B''$ ,  $CC'C''$ , dans des milieux homogènes et isotropes.

successives se propagent en ligne droite. En effet, chaque rayon doit être orthogonal à une surface d'onde à son arrivée et à son départ. Comme les conditions physiques du milieu ne changent pas entre ces deux événements, le rayon doit continuer en ligne droite. Pour tracer, dans un tel milieu, les positions des surfaces d'ondes à des temps différents, il suffit de tracer à partir d'une surface d'onde initiale des lignes droites orthogonales à la surface, puis les surfaces orthogonales à ces lignes. Si le milieu est inhomogène, les changements des conditions physiques peuvent faire dévier les rayons de leur direction initiale.

Le *théorème de Malus* est une conséquence immédiate des résultats obtenus plus haut. Il stipule qu'une onde va d'un point à l'autre de l'espace suivant les points correspondants et que le temps mis par l'onde pour parcourir la distance entre deux points correspondants est le même pour toutes les paires de points correspondants appartenant aux mêmes surfaces d'onde (les distances  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  sur la Fig. 5.4). En effet, chaque surface d'onde correspond à la position de l'onde à un instant donné; l'intervalle de temps entre deux surfaces d'onde est donc le même pour toutes les paires de points correspondants. La Fig 5.5 illustre le théorème de Malus pour un milieu inhomogène.

La distance entre deux points correspondants dépend de la vitesse de l'onde. Si le milieu est inhomogène, la vitesse peut varier d'un point à l'autre de l'espace et par conséquent les distances entre les diverses paires de points correspondants peuvent être différentes. En revanche, si le milieu est homogène et isotrope, la vitesse est la même partout et, d'après le théorème de Malus, les distances entre les diverses paires de points correspondants seront égales. Par conséquent, à des intervalles de temps égaux, les surfaces d'onde seront équidistantes.

## 5.5 Milieux diélectriques

Les ondes électromagnétiques peuvent aussi se propager dans les milieux matériels. Il faut s'attendre cependant à ce que ces milieux opposent une certaine résistance à la propagation de l'onde et que ceci se traduise par une diminution de la vitesse de propagation. Une analyse microscopique confirme ce comportement.

Les milieux matériels sont formés d'atomes. Pour un milieu matériel neutre chaque atome est lui-même neutre et le milieu ne contient pas non plus d'électrons libres. Un atome neutre étant constitué d'un noyau chargé positivement et d'un ensemble d'électrons

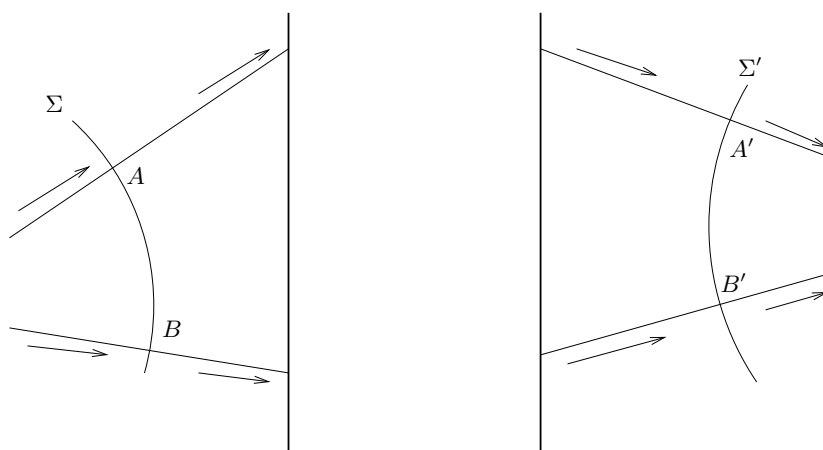


FIGURE 5.5 – Théorème de Malus dans le cas d'un milieu inhomogène, représenté par l'espace entre les deux lignes verticales. L'onde va de  $A$  à  $A'$  et de  $B$  à  $B'$  dans le même intervalle de temps.

chargés négativement tournant autour du noyau, on peut assimiler l'atome dans une première approximation à un dipôle électrique neutre tournant. Les effets électriques moyens dans le temps de cet atome sont nuls. En outre, tous les atomes du milieu ont des mouvements internes incohérents, de telle sorte qu'on peut complètement négliger leurs effets collectifs. Mais, lorsque le milieu est placé en présence d'un champ électrique extérieur, les moments dipolaires des atomes auront tendance à s'aligner suivant la direction du champ électrique extérieur et de ce fait les effets de tous les atomes du milieu s'ajoutent d'une façon cohérente et donnent naissance à un champ électrique induit qui s'oppose par ses effets au champ extérieur qui lui a donné naissance. Dans les cas les plus simples, ce phénomène se traduit par une augmentation de la valeur de la permittivité électrique du milieu comparée à celle du vide. Ainsi,  $\varepsilon_0$  est remplacée par  $\varepsilon$  :

$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon, \quad \varepsilon > \varepsilon_0. \quad (5.47)$$

Ces milieux sont appelés *milieux diélectriques*. La valeur de  $\varepsilon$  dépend du milieu considéré.

L'onde électromagnétique contenant un champ électrique, le phénomène décrit ci-dessus se produit chaque fois qu'une onde électromagnétique pénètre dans un milieu diélectrique. La vitesse de propagation de l'onde est maintenant donnée par la formule

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu_0}. \quad (5.48)$$

En la comparant à la célérité dans le vide, donnée par l'Éq. (5.4), on obtient :

$$v = c\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}}, \quad v < c, \quad (5.49)$$

ce qui confirme l'effet de diminution de la vitesse de l'onde dans le milieu matériel.

On définit *l'indice de réfraction du milieu*, désigné par  $n$ , par le rapport  $c/v$  :

$$n = \frac{c}{v}. \quad (5.50)$$

Pour les ondes optiques, les milieux diélectriques intéressants sont les *milieux transparents* qui les laissent passer sans les absorber complètement, de telle sorte qu'elles continuent à rester visibles. Les gaz, la plupart des liquides et certains solides, comme le verre, sont transparents aux ondes optiques. Comme ordre de grandeur, l'indice de réfraction de l'eau est  $n = 1,33$  (aux températures ambiantes), celui du verre  $n = 1,52$  et celui des gaz (dans les conditions normales) très proche de 1,  $n = 1,00$ .

La modification de la vitesse de l'onde dans les milieux matériels se répercute aussi sur la relation dispersion (5.21) ou (5.35). Elle est maintenant remplacée par la relation

$$k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c}. \quad (5.51)$$

C'est cette dernière modification qui explique la déviation de l'onde électromagnétique lors de son passage d'un milieu à l'autre. Généralement, les conditions de raccordement sur la surface de séparation de deux milieux matériels font intervenir, pour les ondes planes et les ondes sphériques en particulier, les vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$ , qui changent de module et de direction d'un milieu à l'autre ; comme le vecteur d'onde définit la direction de propagation de l'onde, celle-ci change en même temps.

Dans les milieux inhomogènes, la permittivité  $\varepsilon$  peut changer suivant des points différents et dépendre ainsi de  $\mathbf{r}$  :

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}), \quad (5.52)$$

ce qui entraîne aussi une variation de  $v$  et de  $n$  suivant  $\mathbf{r}$  :

$$v = v(\mathbf{r}), \quad n = n(\mathbf{r}). \quad (5.53)$$

## 5.6 Chemin optique

Le déplacement infinitésimal  $d\mathbf{s} \equiv d\mathbf{r}$  effectué par un rayon dans un milieu quelconque s'exprime en fonction de la vitesse instantanée  $\mathbf{v}$  de l'onde et du temps infinitésimal  $dt$  écoulé :

$$d\mathbf{s} = \mathbf{v} dt. \quad (5.54)$$

Son module est :

$$ds = v dt. \quad (5.55)$$

Or  $v$  est donné dans le milieu en fonction de la vitesse de la lumière dans le vide et l'indice de réfraction par les Éqs. (5.49)-(5.50) :

$$v = \frac{c}{n}. \quad (5.56)$$

L'équation (5.55) s'écrit :

$$ds = \frac{c}{n} dt. \quad (5.57)$$

La quantité

$$dt = \frac{n}{c} ds \quad (5.58)$$

représente le temps infinitésimal de parcours de la distance  $ds$  dans le milieu. La quantité

$$cdt = nds \quad (5.59)$$

représente la distance que l'onde aurait parcourue pendant le même temps  $dt$  dans le vide.

On définit le *chemin optique* par la quantité  $nds$ , c'est-à-dire par la distance parcourue par l'onde dans le vide pendant un temps  $dt$  :

$nds = \text{chemin optique} = \text{distance parcourue par l'onde dans le vide pendant le temps } dt.$

Sous forme finie, le chemin optique entre deux points quelconques  $A$  et  $B$  joints par l'onde au cours de sa propagation est l'intégrale de  $nds$  et est noté  $[AB]$  (Fig.5.6) :

$$[AB] = \int_{AB} nds. \quad (5.60)$$

Dans un milieu inhomogène, la trajectoire du rayon joignant  $A$  à  $B$  est en général curviligne. L'intégrale (5.60) est par conséquent une intégrale curviligne calculée sur la ligne  $AB$ .

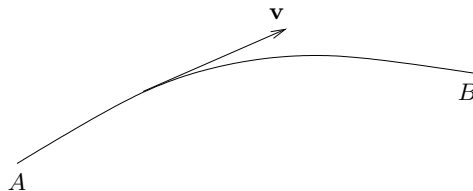


FIGURE 5.6 – Trajectoire d'un rayon entre un point  $A$  et un point  $B$ . Le chemin optique  $[AB]$  est l'intégrale de  $nds$  sur cette trajectoire.

La notion de chemin optique joue un rôle pratique important dans les calculs relatifs aux ondes optiques. En revenant au théorème de Malus (Sect. 5.4), nous avons vu que le temps de parcours par l'onde entre deux surfaces d'onde était le même entre deux paires de points correspondants, mais que dans un milieu inhomogène, les distances correspondantes pouvaient être différentes. Or, l'Éq. (5.59) nous montre que le temps de parcours multiplié par  $c$  n'est autre que le chemin optique. On peut donc reformuler le théorème de Malus avec la notion de chemin optique.



*Théorème de Malus : Le chemin optique entre deux surfaces d'onde est le même pour toutes les paires de points correspondants.*

On a ainsi sur la Fig. 5.5 :

$$[AA'] = [BB']. \quad (5.61)$$

[Le chemin optique  $[AA']$ , par exemple, est calculé suivant la trajectoire empruntée par le rayon pour aller de  $A$  à  $A'$ .]

Le théorème de Malus, tel qu'exprimé par l'Éq. (5.61), peut aussi être appliqué dans des conditions plus générales. Il n'est pas nécessaire que les paires de points  $A$  et  $B$  d'une part et  $A'$  et  $B'$  de l'autre appartiennent à la même surface d'onde. Les points  $A$  et  $B$  peuvent appartenir à l'instant  $t$  de leur observation à deux surfaces d'ondes différentes ; dans ce cas on peut avoir  $u_A(t) \neq u_B(t)$ . Supposons que les deux ondes arrivent respectivement en  $A'$  et en  $B'$  au même instant  $t'$ . Le temps de parcours de la première onde entre  $A$  et  $A'$  est alors le même que celui de la deuxième onde entre  $B$  et  $B'$ . Cet intervalle de temps multiplié par  $c$  n'est autre que le chemin optique correspondant. On retrouve alors l'égalité des chemins optiques (5.61).

## 5.7 Approximation de l'optique géométrique

La résolution exacte de l'équation du mouvement des ondes dans les milieux inhomogènes est souvent difficile et des expressions exactes de la fonction  $u$  ne peuvent en général être obtenues sous forme analytique. Néanmoins, lorsque les propriétés du milieu varient lentement dans des régions finies de l'espace, on peut avoir recours à des approximations qui conduisent à des expressions simplifiées des diverses grandeurs et ramènent la résolution du problème à celle de problèmes connus.

Nous avons vu que la direction de propagation de l'onde est donnée en chaque point de l'espace par le gradient de la fonction  $u$  qui décrit l'onde (Sect. 5.4). Dans le cas des ondes planes monochromatiques, le gradient de  $u$  est proportionnel au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , qui est ici un vecteur constant, vérifiant la relation de dispersion (5.21). Dans le cas des ondes sphériques, la définition d'un vecteur d'onde a nécessité l'utilisation d'une approximation, celle de négliger la variation du facteur  $1/r$  devant celle de la fonction exponentielle de l'onde [Éqs. (5.38)-(5.40)], c'est-à-dire 1 devant  $kr$  ou  $r/\lambda$  :

$$kr \gg 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{r} \ll 1. \quad (5.62)$$

Cette approximation définit *l'approximation de l'optique géométrique* dans le cas des ondes sphériques. Mais celle-ci peut aussi être généralisée à d'autres types d'ondes.

L'expression complexe de  $\tilde{u}$  peut se factoriser en général en deux parties, l'une qui représente un module et l'autre l'exponentielle d'une phase :

$$\tilde{u}(t, \mathbf{r}) = A(t, \mathbf{r})e^{i\tilde{\psi}(t, \mathbf{r})}, \quad (5.63)$$

les fonctions  $A$  et  $\tilde{\psi}$  étant réelles. Dans le cas des ondes monochromatiques,  $\tilde{u}$  satisfait à l'Éq. (5.18) et  $\tilde{\psi}$  se sépare en deux termes indépendants,

$$\tilde{\psi}(t, \mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) - \omega t, \quad (5.64)$$

tandis que  $A$  devient indépendante de  $t$ .  $\tilde{u}$  devient :

$$\tilde{u}(t, \mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i(\psi(\mathbf{r}) - \omega t)}. \quad (5.65)$$

L'approximation de l'optique géométrique suppose que dans les milieux inhomogènes, sur des distances où l'inhomogénéité du milieu varie faiblement, la fonction  $A(\mathbf{r})$  est une fonction lentement variable et peut éventuellement être remplacée en première approximation par une constante. Dans ce cas, la variation de la fonction  $\tilde{u}$  est donnée par celle de sa phase  $\tilde{\psi}$ . En particulier, lorsqu'on calcule dans cette approximation le gradient de  $\tilde{u}$ , on trouve :

$$\nabla \tilde{u} = i(\nabla \psi)\tilde{u}. \quad (5.66)$$

Par analogie avec l'Éq. (5.23), on peut alors définir localement un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  :

$$\nabla \psi = \mathbf{k}(\mathbf{r}). \quad (5.67)$$

Dans l'approximation supplémentaire où la dépendance en  $r$  de  $\mathbf{k}$  est négligée (mais pas ses dépendances en  $\theta$  et  $\varphi$ ), le module de  $\mathbf{k}$  vérifie la relation de dispersion (5.51) :

$$k = |\mathbf{k}| = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c}. \quad (5.68)$$

Le vecteur  $\mathbf{k}$  donne en chaque point la direction de propagation de l'onde ; il est tangent au rayon en chaque point.

Ainsi, l'approximation de l'optique géométrique consiste à traiter chaque onde *localement* comme une onde plane.

Calculons maintenant la différence de phase spatiale  $\psi$  qu'une onde représentée par la fonction  $\tilde{u}$  subit en passant d'une surface d'onde à une autre en suivant un rayon  $AA'$  (Fig. 5.5). La variation infinitésimale de  $\psi$  est donnée par la différentielle  $d\psi$  et sa variation finie entre  $A$  et  $A'$  par l'intégrale de  $d\psi$  le long du chemin (généralement curviligne)  $AA'$ . Mais  $d\psi$  étant une différentielle totale, son intégrale est tout simplement  $\psi$  prise entre  $A'$  et  $A$  :

$$\Delta\psi = \int_{\psi_A}^{\psi_{A'}} d\psi = \psi_{A'} - \psi_A. \quad (5.69)$$

D'autre part, d'après la formule générale des différentielles totales, Éq. (5.43),  $d\psi$  s'écrit aussi :

$$d\psi = \nabla\psi \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.70)$$

Or, dans l'approximation de l'optique géométrique,  $\nabla\psi = \mathbf{k}$ . En revenant à la notation  $d\mathbf{r} \equiv d\mathbf{s}$ , on a pour  $d\psi$  :

$$d\psi = \mathbf{k} \cdot d\mathbf{s}. \quad (5.71)$$

En notant que  $\mathbf{k}$  est tangent au rayon donc à  $d\mathbf{s}$ , on a  $\mathbf{k} \cdot d\mathbf{s} = kds$ .  $d\psi$  devient :

$$d\psi = kds. \quad (5.72)$$

Finalement, en utilisant la relation de dispersion (5.68), on trouve :

$$d\psi = \frac{\omega}{c} nds. \quad (5.73)$$

Or,  $nds$  a été défini comme l'élément infinitésimal de chemin optique. Il s'ensuit que :

$$\int_{\psi_A}^{\psi_{A'}} d\psi = \frac{\omega}{c} \int_A^{A'} nds = \frac{\omega}{c} [AA']. \quad (5.74)$$

La comparaison avec l'Éq. (5.69) donne :

$$\psi_{A'} - \psi_A = \frac{\omega}{c} [AA']. \quad (5.75)$$

La différence de phase spatiale de la fonction  $\tilde{u}$  entre deux surfaces d'onde jointes par un rayon est égale donc, dans l'approximation de l'optique géométrique, au chemin optique parcouru, multiplié par le facteur constant  $\frac{\omega}{c}$ .

Par définition des surfaces d'onde, la fonction  $\tilde{u}$  a la même valeur en tous les points d'une surface d'onde. On a ainsi sur la Fig. 5.5,  $\tilde{u}_B = \tilde{u}_A$  et  $\tilde{u}_{B'} = \tilde{u}_{A'}$ , les points  $B$  et  $A$  étant sur la surface d'onde  $\Sigma$  et  $B'$  et  $A'$  sur  $\Sigma'$ . D'après l'approximation de l'optique

géométrique, on peut supposer que la fonction  $A(\mathbf{r})$  de l'expression de  $\tilde{u}$ , Éq. (5.65), reste constante sur  $\Sigma$  et sur  $\Sigma'$ . On en déduit que

$$\psi_B = \psi_A, \quad \psi_{B'} = \psi_{A'}, \quad (5.76)$$

ce qui implique que

$$\psi_{B'} - \psi_B = \psi_{A'} - \psi_A, \quad (5.77)$$

relation qu'on aurait pu aussi obtenir à partir de l'égalité des chemins optiques  $[AA']$  et  $[BB']$  [Éq. (5.61)] et de l'Éq. (5.75).

## 5.8 Principe de Fermat

Nous avons vu que dans un milieu homogène et isotrope, le rayon de l'onde, émis à partir d'un point d'une surface d'onde, décrit une ligne droite (Sect. 5.4). Or la ligne droite est le chemin le plus court pour aller d'un point à l'autre. La distance parcourue multipliée par l'indice de réfraction du milieu, qui est une constante dans tout milieu homogène et isotrope, est égale au chemin optique. On en déduit que le chemin optique emprunté par le rayon est aussi minimal.

Si l'onde traverse la surface de séparation de deux milieux homogènes et isotropes, sa direction de propagation peut subir une déviation. Néanmoins, dans chaque milieu le rayon décrira une ligne droite et par conséquent dans chacun d'eux le chemin optique sera minimal. Comme le chemin optique total est la somme des deux chemins optiques, on en déduit aussi que le chemin optique total est minimal.

Ce raisonnement se généralise facilement à un grand nombre de milieux homogènes et isotropes traversés par l'onde. Lorsque le milieu est inhomogène, on peut le découper en sous-milieux de petites dimensions assimilables à des milieux homogènes et isotropes. On peut alors reprendre le raisonnement précédent et arriver à la conclusion que le chemin optique total emprunté par le rayon est minimal. Le principe de Fermat est un énoncé de ce résultat.

*Principe de Fermat : Le chemin optique emprunté par un rayon pour aller d'un point à un autre dans un milieu quelconque est extrémal.*

[Dans certains cas le chemin optique peut être maximal.]

Lorsqu'on connaît la position d'une surface d'onde, on peut en fait suivre sa propagation en traçant de proche en proche les rayons émis qui lui sont constamment orthogonaux (Sect. 5.4). Dans ce cas, le principe de Fermat n'apporte pas d'information supplémentaire. En revanche, lorsqu'on ne connaît que le point de départ et le point d'arrivée d'un rayon, on ne peut par avance savoir quelle direction va emprunter le rayon à son point de départ ; dans ce cas, le principe de Fermat permet de construire la trajectoire du rayon.

Considérons à titre d'exemple, deux milieux homogènes et isotropes, d'indices de réfraction respectifs  $n_1$  et  $n_2$ , séparés par un plan. On veut construire la trajectoire empruntée par un rayon pour aller d'un point  $A$  du milieu 1 à un point  $B$  du milieu 2. (Fig. 5.7).

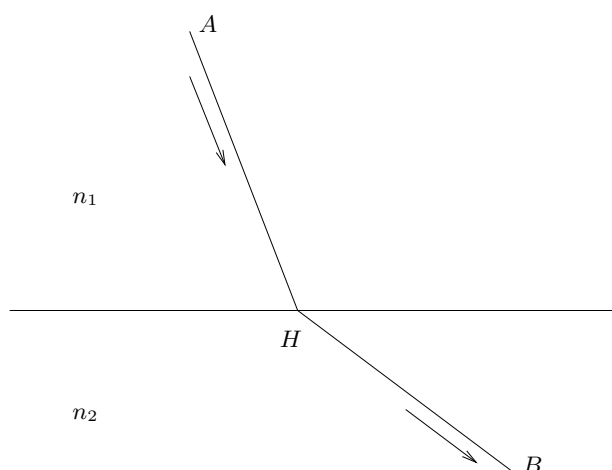


FIGURE 5.7 – Application du principe de Fermat au chemin optique  $[AHB]$ . La position du point  $H$  sur le plan de séparation des deux milieux est inconnue.

Dans chacun des deux milieux, le chemin optique est une ligne droite. Mais, la direction du rayon émis en  $A$  étant inconnue, la position du point  $H$ , point de passage vers le deuxième milieu, reste inconnue. En calculant le chemin optique total  $[AHB]$  sous la forme d'une somme des deux chemins optiques  $[AH]$  et  $[HB]$  en fonction des coordonnées du point  $H$ , puis en cherchant l'extrêmuu de  $[AHB]$  en fonction de ces coordonnées, on détermine la position physique du point  $H$ . La résolution de ce problème conduit aussi aux lois de Snell–Descartes.

## 5.9 Lois de Snell–Descartes

Les lois de Snell–Descartes peuvent être obtenues en utilisant les propriétés des chemins optiques. Elles peuvent être déduites soit à partir du principe de Fermat, soit à partir du théorème de Malus, en faisant intervenir les surfaces d’onde. Nous allons utiliser cette dernière méthode, qui est plus rapide.

Deux milieux homogènes et isotropes, d’indices de réfraction respectifs  $n_1$  et  $n_2$ , sont séparés par un plan. Un faisceau parallèle de rayons optiques tombe sur le plan avec un angle d’incidence avec la normale au plan égal à  $i_1$ . Une partie du faisceau lumineux est transmise ou réfractée dans le deuxième milieu, avec un angle de réfraction égal à  $i_2$ , et une autre est réfléchi dans le premier milieu, avec un angle de réflexion égal à  $i'_1$ .

Le faisceau des rayons étant parallèle, on peut assimiler l’onde incidente à une onde plane et les surfaces d’onde à des plans orthogonaux au faisceau.

Un rayon incident et la normale au plan au point d’incidence forment un plan, qui est un plan de symétrie pour l’ensemble des deux milieux. Ceux-ci étant homogènes et isotropes, les rayons réfractés et réfléchis doivent se trouver dans ce plan par raison de symétrie. Toute sortie de ce plan serait un signe d’inhomogénéité. C’est la première loi de Snell–Descartes.

Pour l’étude de la réfraction, considérons la figure 5.8.

Le segment  $IH$  appartient à une surface d’onde (plan orthogonal à la figure). Le segment  $JK$  appartient à une autre surface d’onde. D’après le théorème de Malus (Sect. 5.6), les chemins optiques  $[IJ]$  et  $[HK]$  sont égaux :

$$[IJ] = [HK]. \quad (5.78)$$

On en déduit facilement la relation

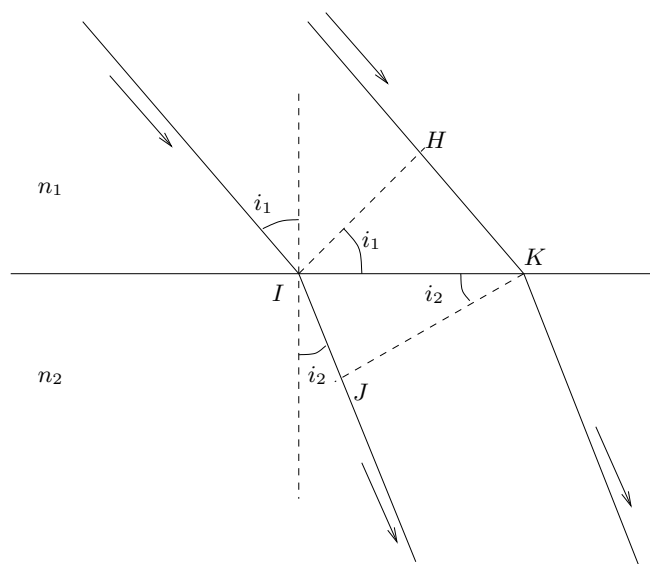
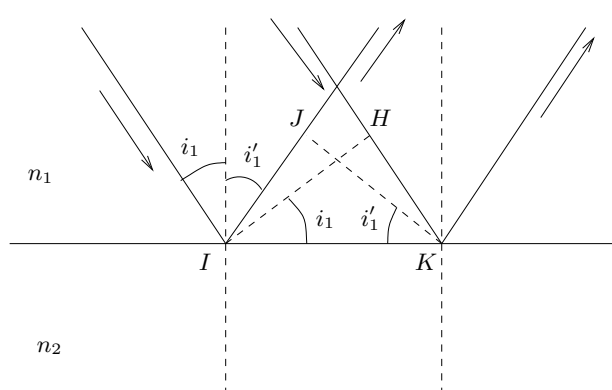
$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2, \quad (5.79)$$

qui représente la deuxième loi de Snell–Descartes.

Pour l’étude de la réflexion, considérons la figure 5.9.

En considérant les surfaces d’onde contenant les segments  $IH$  et  $JK$  et en utilisant le théorème de Malus, on trouve l’égalité des chemins optiques  $[IJ]$  et  $[HK]$  :

$$[IJ] = [HK]. \quad (5.80)$$

FIGURE 5.8 – Les chemins optiques  $[IJ]$  et  $[HK]$  sont égaux.FIGURE 5.9 – Les chemins optiques  $[IJ]$  et  $[HK]$  sont égaux.

On en déduit, en notant que les deux chemins optiques sont situés dans le même milieu, l'égalité des angles  $i'_1$  et  $i_1$ ,

$$i'_1 = i_1, \quad (5.81)$$

qui représente la troisième loi de Snell–Descartes.



# Chapitre 6

## Interférence

### 6.1 Introduction

Le phénomène d'interférence se rencontre chaque fois que deux ou plusieurs ondes, de même nature, se rencontrent en un même point de l'espace au même instant. Leur superposition peut produire une onde globale dont les propriétés, et notamment l'amplitude, peuvent changer en se déplaçant dans l'espace. Un autre type d'interférence est rencontré dans le cas des ondes stationnaires (Ch. 3). L'onde stationnaire résulte de la superposition de deux ondes progressives, de mêmes amplitudes (à des signes près), se propageant en sens opposés (Sect. 3.5). Dans ce cas, les propriétés de l'onde résultante sont complètement différentes de celles de chacune des ondes progressives. En général, les ondes stationnaires apparaissent chaque fois que des ondes sont confinées dans une région limitée de l'espace (cordes et tuyaux de longueur finie, cavités, etc.).

Ce chapitre est consacré à l'étude du phénomène d'interférence concernant la variation de l'amplitude résultante suivant les points de l'espace. Cet aspect a de nombreuses applications expérimentales, notamment dans le domaine des ondes optiques que nous allons désormais considérer.

### 6.2 Intensité lumineuse à partir d'une seule source

Considérons une onde sphérique monochromatique sortante, émise par une source ponctuelle, dont la position est choisie comme origine des coordonnées, et se propageant dans un milieu homogène et isotrope d'indice de réfraction  $n$ . La fonction décrivant cette

onde a la forme (5.36) :

$$\tilde{u}(t, r) = \frac{A}{r} e^{i(kr - \omega t + \varphi)}, \quad k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c}, \quad (6.1)$$

où  $A$  est une constante réelle positive ( $k$  vérifiant la relation de dispersion (5.51)).

Pour calculer l'intensité lumineuse de cette onde, on doit d'abord calculer la puissance qu'elle transporte. Celle-ci, dans le cas tridimensionnel, est obtenue à partir de la densité de courant d'énergie  $\mathbf{P}$  que nous avons définie dans la Sect. 5.4, Éq. (5.46). Dans le cas des ondes électromagnétiques, le coefficient  $C$  de cette dernière équation est égale à l'inverse de la perméabilité magnétique  $\mu_0$  du vide ou du milieu et  $\mathbf{P}$  prend la forme :

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\mu_0} (\nabla u) \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (6.2)$$

En appliquant cette formule à la partie réelle de  $\tilde{u}$ ,  $u = \frac{A}{r} \cos(kr - \omega t + \varphi)$ , et en utilisant en même temps l'approximation de l'optique géométrique (Sect. 5.7), qui consiste à négliger les variations du facteur  $1/r$  devant celles du facteur  $kr$ , on trouve :

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = \frac{k\omega}{\mu_0 r^2} A^2 \mathbf{e}_r \sin^2(kr - \omega t + \varphi). \quad (6.3)$$

[On a utilisé pour l'opérateur gradient sa représentation en coordonnées sphériques, Éq. (5.37).] Le vecteur densité de courant d'énergie est porté par le vecteur  $\mathbf{e}_r$  qui est orthogonal à la surface d'onde sphérique et qui représente le sens de propagation de l'onde et de l'énergie. La puissance transportée par l'onde à travers une surface  $S$  se calcule par l'Éq. (5.45). Lorsque la surface  $S$  est orthogonale à  $\mathbf{e}_r$ ,  $d\mathbf{S} = \mathbf{e}_r dS$  et le produit scalaire entre  $\mathbf{P}$  et  $d\mathbf{S}$  fait disparaître  $\mathbf{e}_r$  et l'intégrale se réduit à celle de  $dS$ . Dans l'approximation de l'optique géométrique, on peut supposer que  $r$  reste constant sur  $S$  et l'intégration de  $dS$  donne tout simplement l'aire  $S$  :

$$\mathcal{P}(t, \mathbf{r}) = S \frac{k\omega}{\mu_0 r^2} A^2 \sin^2(kr - \omega t + \varphi). \quad (6.4)$$

La valeur moyenne dans le temps de la puissance transportée se calcule comme dans la Sect. (4.6) et on trouve un facteur 1/2 :

$$\overline{\mathcal{P}} = S \frac{k\omega}{2\mu_0 r^2} A^2. \quad (6.5)$$

L'intensité de l'onde lumineuse est définie comme étant le module de la puissance transportée moyennée dans le temps par unité de surface, Éq. (4.89) :

$$I = \frac{|\overline{\mathcal{P}}|}{S} = \frac{k\omega}{2\mu_0 r^2} A^2. \quad (6.6)$$

Dans notre étude du phénomène d'interférence, nous nous intéresserons surtout à la variation de l'intensité lumineuse suivant les points de l'espace et non à sa valeur absolue. C'est pourquoi, pour simplifier la notation, nous allons définir une *intensité réduite* en enlevant de la formule (6.6) le facteur multiplicatif constant  $(k\omega/\mu_0)$  :

$$I = \frac{A^2}{2r^2}. \quad (6.7)$$

Nous remarquons maintenant que ce résultat aurait pu aussi être obtenu par une procédure technique simplificatrice qui consiste à calculer directement le module au carré de la fonction complexe  $\tilde{u}$  [Éq. (6.1)] et à le diviser par 2 :

$$I = \frac{1}{2} \tilde{u} \tilde{u}^*. \quad (6.8)$$

Le facteur  $1/2$  tient compte de la prise de la valeur moyenne dans le temps. Tant qu'on s'intéresse à la valeur de l'intensité réduite, on peut directement appliquer la formule (6.8), si  $u$  est donnée en représentation complexe, en évitant le passage à la représentation réelle et le calcul des valeurs moyennes dans le temps. Néanmoins la formule (6.8) n'est pas toujours valide. En particulier, elle devient inexacte lorsqu'on considère la superposition d'ondes se propageant en sens opposés ; son application au cas des ondes stationnaires donnerait un résultat faux. Au cours de ce chapitre, nous allons toujours considérer des ondes se propageant dans un même sens ou étant de même type (ondes sphériques sortantes) ; la difficulté évoquée ne sera donc pas présente et la formule (6.8) pourra être appliquée aux divers cas rencontrés.

### 6.3 Interférence à partir de deux sources ponctuelles

Nous étudions dans cette section les propriétés d'une onde résultant de la superposition de deux autres ondes émises chacune par une source ponctuelle dans un milieu homogène et isotrope. Les sources étant ponctuelles, on peut supposer que les ondes qu'elles émettent sont sphériques. Les deux sources sont situées respectivement aux points  $O_1$  et  $O_2$ . Le point d'observation des ondes est le point  $M$  (Fig. 6.1). Les deux ondes sont supposées être monochromatiques, de même pulsation  $\omega$ .

La forme des deux ondes sphériques au point  $M$  est :

$$\tilde{u}_1(t, r_1) = \frac{A_1}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t + \varphi_1)}, \quad \tilde{u}_2(t, r_2) = \frac{A_2}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t + \varphi_2)}, \quad k = \frac{\omega}{v} = n \frac{\omega}{c}, \quad (6.9)$$

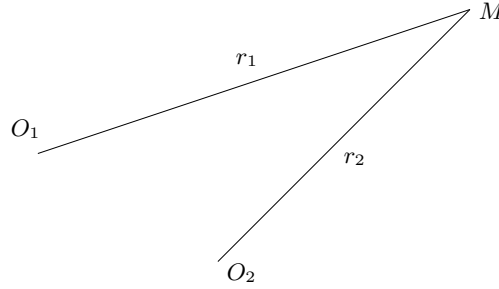


FIGURE 6.1 – Deux sources ponctuelles placées en  $O_1$  et  $O_2$  et envoyant des ondes sphériques dans l'espace. On observe l'effet de la superposition des deux ondes au point  $M$ .

où  $A_1$  et  $A_2$  sont des constantes réelles positives et  $r_1 = |\mathbf{O}_1\mathbf{M}|$ ,  $r_2 = |\mathbf{O}_2\mathbf{M}|$ .

L'intensité de chacune de ces ondes est donnée par la formule (6.7) :

$$I_1 = \frac{A_1^2}{2r_1^2}, \quad I_2 = \frac{A_2^2}{2r_2^2}. \quad (6.10)$$

Toutefois, à cause de la nature ondulatoire du phénomène de propagation, on constate que l'intensité de l'onde résultant de la superposition des deux ondes précédentes n'est pas en général égale à la somme de  $I_1$  et de  $I_2$  et qu'elle dépend de la position du point  $M$ . L'onde totale est :

$$\tilde{u}(t, \mathbf{r}_M) = \tilde{u}_1(t, r_1) + \tilde{u}_2(t, r_2) = \frac{A_1}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t + \varphi_1)} + \frac{A_2}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t + \varphi_2)}. \quad (6.11)$$

L'intensité résultante est donnée par la formule (6.8) :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \tilde{u} \tilde{u}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{A_1}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t + \varphi_1)} + \frac{A_2}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t + \varphi_2)} \right) \\ &\quad \times \left( \frac{A_1}{r_1} e^{-i(kr_1 - \omega t + \varphi_1)} + \frac{A_2}{r_2} e^{-i(kr_2 - \omega t + \varphi_2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{A_1^2}{r_1^2} + \frac{A_2^2}{r_2^2} + 2 \frac{A_1 A_2}{r_1 r_2} \cos \left( k(r_1 - r_2) + (\varphi_1 - \varphi_2) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.12)$$

En posant

$$\varphi \equiv k(r_1 - r_2) + (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6.13)$$

et en utilisant la définition des intensités individuelles (6.10), on peut réécrire  $I$  sous la forme :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi. \quad (6.14)$$

On constate bien qu'en général  $I \neq I_1 + I_2$ .

La valeur de  $I$  dépend de la position du point  $M$  dans l'espace. Si  $r_1$  et  $r_2$  sont grands, on se trouve dans le domaine d'applicabilité de l'approximation de l'optique géométrique. En déplaçant le point  $M$  dans une petite région macroscopique, on peut supposer que  $1/r_1$  et  $1/r_2$  restent pratiquement constants, de telle sorte qu'on peut considérer  $I_1$  et  $I_2$  comme des constantes. En revanche, la quantité  $k(r_1 - r_2)$  qui apparaît dans l'expression de  $\varphi$  [Éq. (6.13)] est rapidement variable lors des déplacements du point  $M$ .

La quantité  $kr$  qui apparaît dans l'expression d'une onde sphérique [Éq. (6.1)] est proportionnelle au chemin optique [Sect. 5.6] entre la source (point  $O$ ) et le point d'observation de l'onde (point  $M$ ). En effet, en utilisant la relation de dispersion (6.9), on trouve

$$kr = \frac{\omega}{c} nr. \quad (6.15)$$

Or  $nr$  est le chemin optique fini relative à la distance entre la source et le point d'observation. En revenant à l'expression de  $\varphi$ , on en déduit que la quantité  $k(r_1 - r_2)$  est proportionnelle à la différence des chemins optiques  $[O_1M]$  et  $[O_2M]$  :

$$k(r_1 - r_2) = \frac{\omega}{c} ([O_1M] - [O_2M]). \quad (6.16)$$

On appelle *différence de marche* la différence entre deux chemins optiques, aboutissant au même point mais n'ayant pas les mêmes points initiaux. Ainsi dans l'Éq. (6.16), la quantité  $([O_1M] - [O_2M])$  représente la différence de marche entre les deux chemins optiques concernés.

Il s'ensuit que, dans l'approximation de l'optique géométrique, la variation de l'intensité totale  $I$  dans de petites régions de l'espace est due à celle de la différence de marche entre les chemins optiques des deux ondes qui arrivent en  $M$ . Comme la fonction cosinus varie entre  $-1$  et  $+1$ ,  $I$  varie entre une valeur minimale,  $(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ , et maximale,  $(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$  :

$$(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \leq I \leq (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2, \quad (6.17)$$

la somme  $(I_1 + I_2)$  représentant la moyenne entre ces deux extrêmes. La courbe de variation de  $I$  en fonction de  $\varphi$  est représentée sur la Fig. 6.2. Les maxima se produisent pour  $\varphi = 2m\pi$  et les minima pour  $\varphi = (2m + 1)\pi$ , avec  $m$  entier ou nul.

Si on se place à des distances suffisamment grandes des deux sources, telles que  $r_1$  et  $r_2$  soient beaucoup plus grands que la distance  $O_1O_2$ , on peut remplacer, dans les expressions

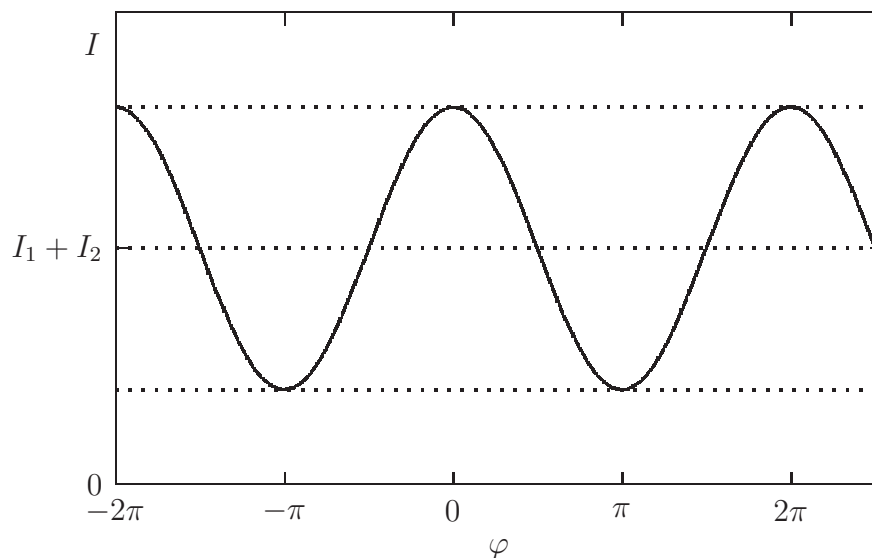


FIGURE 6.2 – Variation de l'intensité totale  $I$  en fonction de  $\varphi$ . Le maximum correspond à  $I = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$  et le minimum à  $I = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ .

de  $I_1$  et de  $I_2$ ,  $r_1$  et  $r_2$  par leur valeur moyenne  $r = (r_1 + r_2)/2$ . La formule (6.14) prend la forme simplifiée

$$I = \frac{1}{2r^2} [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi]. \quad (6.18)$$

Si  $A_1 = A_2$ , le minimum de  $I$  est maintenant à la valeur zéro. Dans ce cas, le contraste entre le minimum et le maximum de  $I$  devient plus aigu, ce qui favorise l'observation visuelle du phénomène.

Nous constatons que la variation de l'intensité totale  $I$  provient, dans l'approximation où  $I_1$  et  $I_2$  sont considérées comme constantes, de celle du terme contenant  $\cos \varphi$  [Éq. (6.14)]. Or ce terme provient de l'interférence des contributions des deux ondes (il est proportionnel à  $\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}$ ). C'est pourquoi, le phénomène mis en évidence par la superposition des deux ondes est appelé *phénomène d'interférence*.

Le lieu géométrique des points de l'espace où  $I$  garde une valeur constante est donné par la condition de constance de  $\varphi$ , c'est-à-dire de  $(r_1 - r_2)$  [Éq. (6.13)]. L'équation  $r_1 - r_2 = \text{constante}$  a pour solution les surfaces hyperboloïdes de foyers  $O_1$  et  $O_2$  (Fig. 6.3).

L'axe  $O_1O_2$  est un axe de symétrie de révolution. En coupant ces hyperboloïdes par un plan orthogonal à  $O_1O_2$ , par exemple en plaçant un écran, on verrait sur le plan des

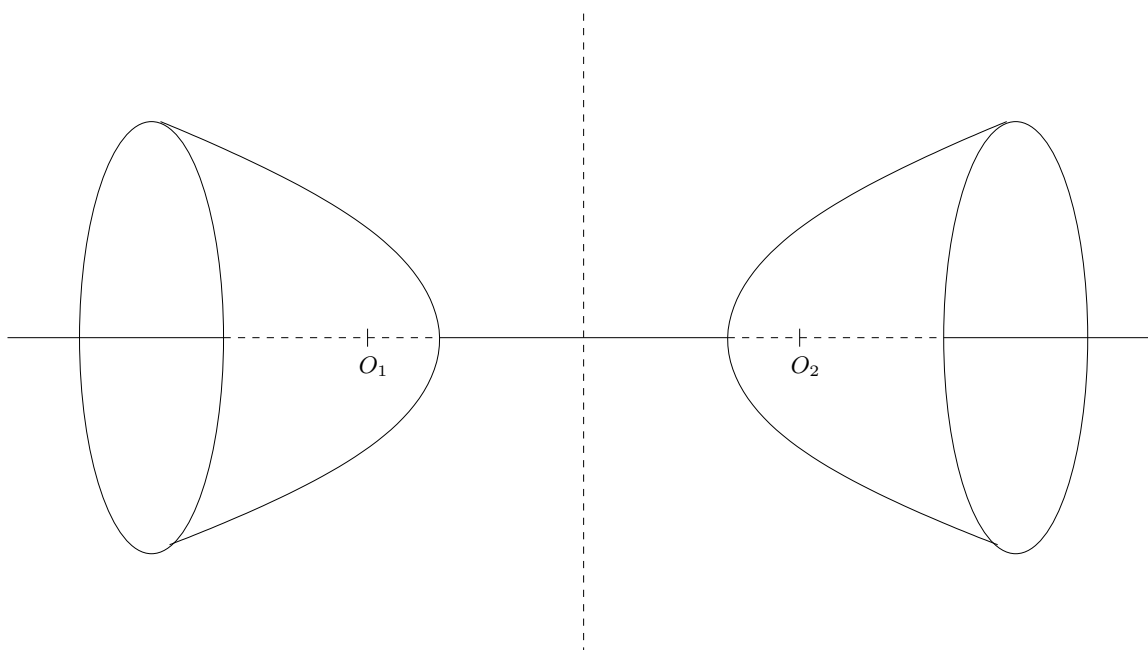


FIGURE 6.3 – Hyperboloïdes de foyers  $O_1$  et  $O_2$ , sur lesquels  $I$  est constant. L'axe  $O_1O_2$  est un axe de symétrie de révolution.

cercles concentriques dont le centre serait la projection de l'axe  $O_1O_2$  sur le plan (Fig. 6.4). Le phénomène d'interférence se manifeste alors par la succession de cercles brillants et de cercles sombres.

On appelle *franges* les lignes dans un plan suivant lesquelles l'intensité totale  $I$  reste constante. Dans le cas précédent, les franges sont circulaires.

En coupant les hyperboloïdes par un plan parallèle à l'axe  $O_1O_2$ , on verrait sur le plan des hyperboles réparties autour d'un axe central, dont la projection sur un plan parallèle passant par  $O_1O_2$  est orthogonale à  $O_1O_2$  et passe par le milieu de  $O_1O_2$  (Fig. 6.5). Si on se trouve au voisinage de cet axe, les hyperboles sont presque confondues avec des droites. Le phénomène d'interférence se manifeste en général par la succession d'hyperboles brillantes et sombres. Les franges sont donc en général ici des hyperboles.

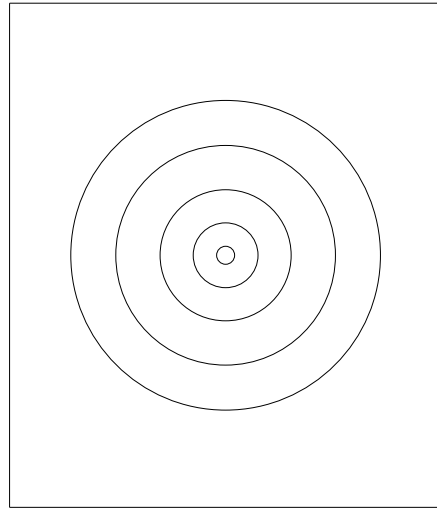


FIGURE 6.4 – Les projections des hyperboloïdes sur un plan orthogonal à l'axe  $O_1O_2$  sont des cercles concentriques.

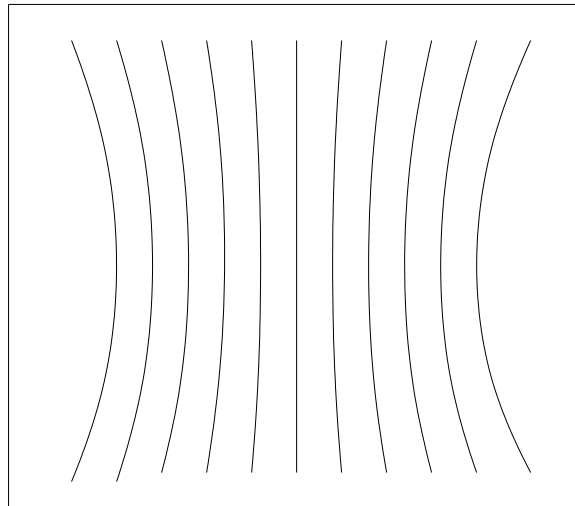


FIGURE 6.5 – Les projections des hyperboloïdes sur un plan parallèle à l'axe  $O_1O_2$  sont des hyperboles.



## 6.4 Cohérence des sources et dispositifs d'interférences lumineuses

Les résultats de la Sect. 6.3 ont été obtenus en supposant que les deux ondes sphériques qui arrivaient au point  $M$  avaient la forme (6.9) avec des constantes de phase  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  bien définies, ce qui impliquait que dans la phase résultante  $\varphi$  [Éq. (6.13)] de la fonction cosinus, la différence  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  était aussi bien définie et constante.

Or une source lumineuse est un objet macroscopique, constitué d'un très grand nombre d'atomes (presqu'infini), qui émettent de la lumière par désexcitation, étant préalablement excités par une force extérieure vers des niveaux d'énergie élevés. Ce processus a lieu cependant d'une manière incohérente (non synchronisée) d'un atome à l'autre. Il en résulte que le point  $M$  reçoit de la source lumineuse non pas une onde mais un très grand nombre d'ondes dont les constantes de phase  $\varphi$  (de l'expression (6.1)) sont différentes d'une façon aléatoire d'une onde à l'autre. L'œil ne pouvant capter que des intensités moyennées au niveau macroscopique, l'intensité totale  $I$  qui est observée pour les ondes envoyées à partir des deux sources sera donnée par la formule (6.14), mais moyennée sur l'ensemble des valeurs aléatoires de  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ . Mais la valeur moyenne de la fonction cosinus par rapport à des variations aléatoires de son argument est nulle et on a :

$$\langle \cos \varphi \rangle = 0, \quad (6.19)$$

ce qui entraîne

$$I = I_1 + I_2. \quad (6.20)$$

Le phénomène d'interférence disparaît complètement. Sur tout écran placé devant les deux sources on ne voit qu'une lumière uniformément répartie.

Une situation similaire résulterait aussi si on superposait deux ondes avec des pulsations différentes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . La phase  $\varphi$  [Éq. (6.14)] dépendrait aussi dans ce cas de la différence  $(\omega_1 - \omega_2)t$ , qui donnerait à  $\cos \varphi$  une valeur moyenne dans le temps nulle.

Pour produire expérimentalement le phénomène d'interférence, il est donc nécessaire que les deux sources émettent de la lumière sous forme *cohérente*, c'est-à-dire avec la même pulsation et avec une différence des constantes de phase,  $(\varphi_1 - \varphi_2)$ , qui soit la même pour toutes les ondes émises, même si au niveau d'une source  $\varphi_1$  ou  $\varphi_2$  prennent des valeurs aléatoires d'un atome à l'autre. Pour assurer cette condition, la seule possibilité est de

transformer les deux sources en sources secondaires ou sources images dont la lumière proviendrait d'une seule source initiale.

Parmi les dispositifs expérimentaux qui réalisent cette condition, le plus classique est celui imaginé par T. Young (1773-1829) au début du 19<sup>e</sup> siècle, connu sous le nom de trous de Young (Fig. 6.6). La lumière émise par une source ponctuelle traverse deux trous placés sur une plaque verticale et qui jouent le rôle des deux sources  $O_1$  et  $O_2$  que nous avons considérées dans la Sect. 6.3. Si la source  $O$  est placée symétriquement par rapport à  $O_1$  et  $O_2$ , on peut supposer que les deux constantes de phase  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont égales; en outre, l'origine commune des deux ondes partant de  $O_1$  et de  $O_2$  implique aussi que les amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  sont égales. Sur la Fig. 6.6, la région de l'interférence correspond à la région commune des deux faisceaux lumineux provenant de  $O_1$  et de  $O_2$ .

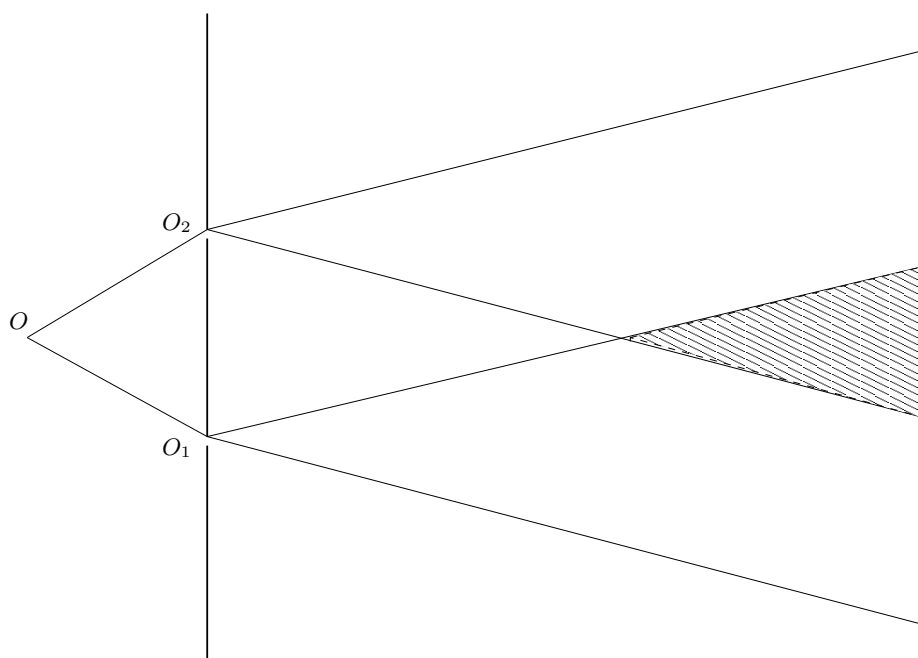


FIGURE 6.6 – Trous de Young. L'interférence est observée sur l'écran placé devant les deux trous, dans la région commune aux deux faisceaux.

La raison pour laquelle les rayons  $OO_1$  et  $OO_2$  ne continuent pas en lignes droites est due au phénomène de *diffraction* qui se manifeste à cause de la petitesse du diamètre des trous. Les trous  $O_1$  et  $O_2$  jouent dans ce cas le rôle de sources secondaires et envoient la lumière essentiellement dans des cônes dont l'angle d'ouverture est inversement

proportionnel au diamètre des trous.

Tous les autres dispositifs expérimentaux utilisent d'une façon ou d'une autre le même principe rencontré avec les trous de Young. Parmi ceux-ci, citons aussi la lame à faces parallèles, constituée d'un diélectrique transparent assez mince d'indice de réfraction  $n$ . (Fig. 6.7). Un rayon lumineux qui arrive sur l'une de ses faces est partiellement réfléchi et partiellement réfracté. Le rayon réfracté, en arrivant sur la seconde face, subit à son tour une réflexion, retourne vers la première face et subit une réfraction et ressort de la lame avec une direction parallèle au premier rayon réfléchi. Ces deux rayons peuvent ensuite être envoyés par une lentille convergente vers un point d'un écran. Il est évident que les deux rayons représentent la propagation de deux ondes cohérentes; leur différence de marche et leur différence de phase sont des constantes bien définies au niveau macroscopique.

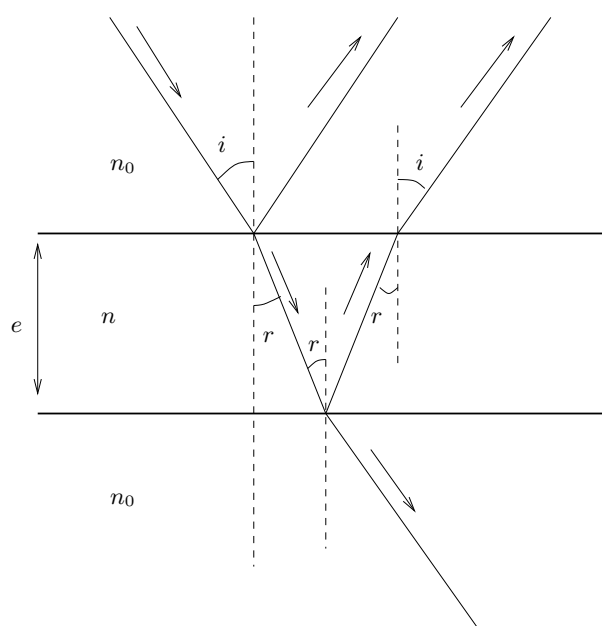


FIGURE 6.7 – Lame à faces parallèles.

## 6.5 Trous de Young

Nous étudions dans cette section les propriétés de la figure d'interférence qui résulte dans l'expérience avec les trous de Young (Fig. 6.6). La distance entre les deux trous est  $s$ , tandis que la distance entre la plaque contenant les trous et l'écran d'observation, qui

lui est parallèle, est  $D$ . Nous choisissons les axes de coordonnées de la façon suivante. L'écran d'observation contient le plan  $Axy$ ,  $A$  étant l'origine des coordonnées. L'axe  $Az$ , qui est orthogonal à l'écran passe par le milieu  $H$  du segment  $O_1O_2$  joignant les deux trous; ceux-ci sont situés sur un axe parallèle à l'axe  $Ay$  (Fig. 6.8).

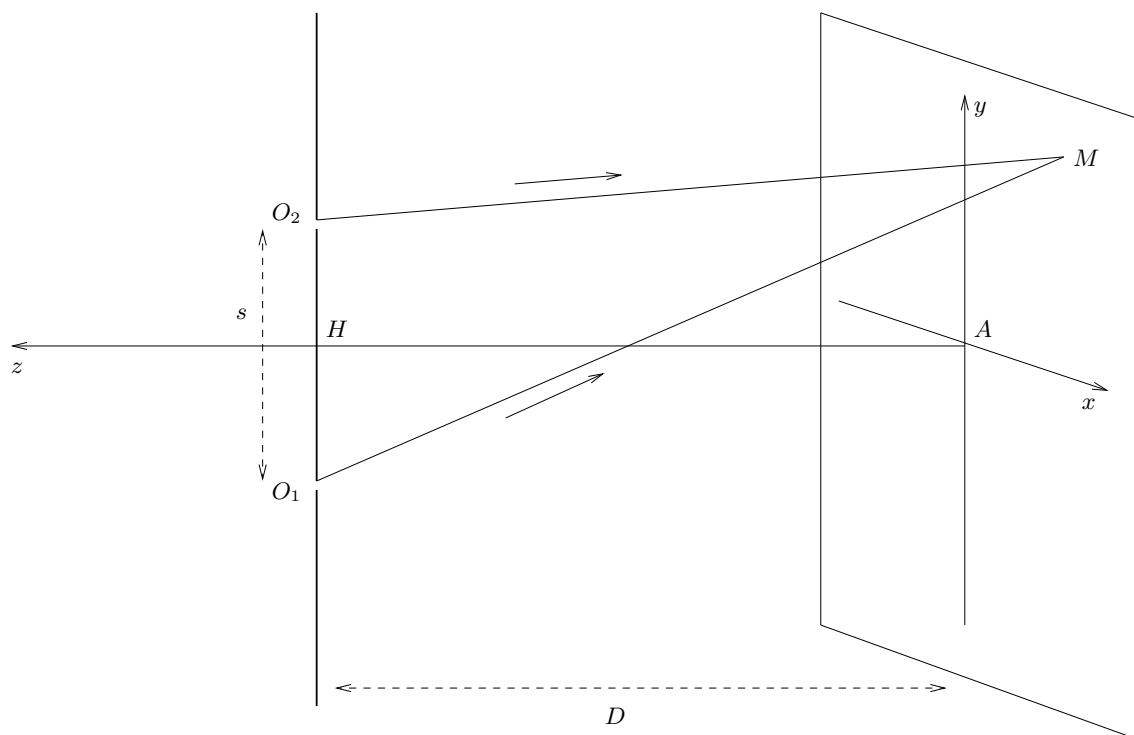


FIGURE 6.8 – Dispositif des trous de Young, avec le choix des axes de coordonnées.

Les deux trous de Young, considérés comme sources secondaires, produisent en général des figures d'interférence dans l'espace suivant les hyperboloïdes que nous avons décrits dans la Sect. 6.3. Dans le cas présent, l'écran étant placé parallèlement aux deux sources, la figure d'interférence sera constituée d'hyperboles placées symétriquement par rapport à l'axe  $Ax$ . Toutefois, si on reste au voisinage de cet axe, comparativement à la distance  $D$ , les hyperboles auront l'allure de lignes droites.

Les coordonnées d'un point  $M$  de l'écran sont  $(x, y, 0)$ , celles des sources  $O_1$  et  $O_2$  respectivement  $(0, -\frac{s}{2}, D)$  et  $(0, \frac{s}{2}, D)$ . On en déduit les composantes des vecteurs  $\mathbf{O}_1\mathbf{M}$  et  $\mathbf{O}_2\mathbf{M}$  :

$$\mathbf{O}_1\mathbf{M} = x\mathbf{e}_x + (y + \frac{s}{2})\mathbf{e}_y - D\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{O}_2\mathbf{M} = x\mathbf{e}_x + (y - \frac{s}{2})\mathbf{e}_y - D\mathbf{e}_z. \quad (6.21)$$

Les valeurs des distances  $r_1 = |\mathbf{O}_1\mathbf{M}| = O_1M$  et  $r_2 = |\mathbf{O}_2\mathbf{M}| = O_2M$  sont :

$$r_1 = \left(x^2 + \left(y + \frac{s}{2}\right)^2 + D^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad r_2 = \left(x^2 + \left(y - \frac{s}{2}\right)^2 + D^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.22)$$

Nous nous placerons désormais dans la situation où  $|x|$ ,  $|y|$  et  $s$  sont très petits devant  $D$  :  $|x|$ ,  $|y|$ ,  $s \ll D$ . En utilisant l'approximation  $(1+w)^\alpha \simeq (1+\alpha w)$  pour  $|w| \ll 1$ , on obtient pour  $r_1$  et  $r_2$  :

$$\begin{aligned} r_1 &= D \left[1 + \frac{x^2 + \left(y + \frac{s}{2}\right)^2}{D^2}\right]^{\frac{1}{2}} \simeq D \left[1 + \frac{x^2 + \left(y + \frac{s}{2}\right)^2}{2D^2}\right], \\ r_2 &= D \left[1 + \frac{x^2 + \left(y - \frac{s}{2}\right)^2}{D^2}\right]^{\frac{1}{2}} \simeq D \left[1 + \frac{x^2 + \left(y - \frac{s}{2}\right)^2}{2D^2}\right]. \end{aligned} \quad (6.23)$$

On trouve pour la différence des distances  $r_1$  et  $r_2$  :

$$r_1 - r_2 = \frac{s}{D}y, \quad (6.24)$$

qui est indépendante de  $x$ .

En tenant compte du fait que les deux constantes de phase  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont égales (les deux ondes proviennent d'une même source placée symétriquement par rapport à  $O_1$  et  $O_2$ , sur l'axe  $Az$ ), on trouve pour la phase  $\varphi$  [Éq. (6.13)] :

$$\varphi = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{s}{D}y, \quad (6.25)$$

où on a introduit la longueur d'onde  $\lambda$  par l'équation

$$\lambda = vT = v \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{k}. \quad (6.26)$$

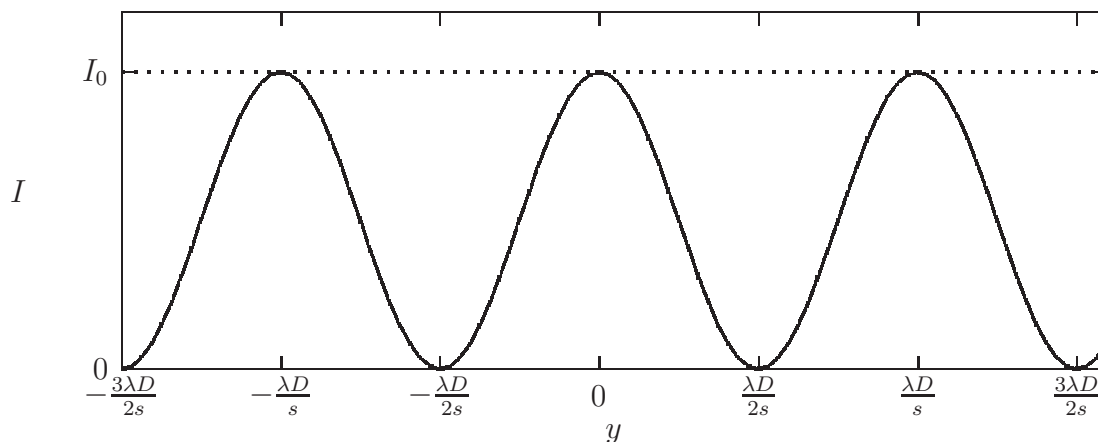
Les deux ondes ayant aussi des amplitude  $A_1$  et  $A_2$  égales,  $A_1 = A_2 = A$ , l'intensité totale observée s'écrit, d'après l'Éq. (6.18) :

$$I = \frac{A^2}{r^2}(1 + \cos \varphi) = \frac{2A^2}{r^2} \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right). \quad (6.27)$$

$r$  représente ici la valeur moyenne  $(r_1 + r_2)/2$ . D'après les approximations faites plus haut, on a  $r \simeq D$  et  $I$  devient, en utilisant aussi l'Éq. (6.25) :

$$I = \frac{2A^2}{D^2} \cos^2\left(\frac{\pi sy}{\lambda D}\right) \equiv I_0 \cos^2\left(\frac{\pi sy}{\lambda D}\right). \quad (6.28)$$

La courbe de variation de  $I$  en fonction de  $y$  est présentée sur la Fig. 6.9. On constate que les minima de  $I$  sont nulles, tandis que les maxima sont égales à  $I_0$ .

FIGURE 6.9 – Variation de l'intensité totale  $I$  suivant  $y$ .

L'expression de  $I$  est indépendante de  $x$ ; par conséquent  $I$  garde la même valeur suivant des lignes droites parallèles à l'axe  $Ax$ , ce qui confirme la prédiction faite au début, concernant la réduction des hyperboles à des droites au voisinage de l'axe des  $x$ . La figure d'interférence est ainsi une succession de lignes droites brillantes et sombres (Fig. 6.10). On a ainsi des franges rectilignes. C'est par cette expérience que Young a pu mettre en évidence la nature ondulatoire de la lumière et mesurer des longueurs d'onde d'ondes monochromatiques.

On appelle *interfrange*, la distance  $i$  entre deux franges successives brillantes ou sombres. Cette distance est obtenue à partir de l'Éq. (6.28) en notant que la fonction cosinus au carré a des maxima successifs lorsque son argument varie de  $\pi$ . On obtient :

$$i = \frac{\lambda D}{s}. \quad (6.29)$$

A titre d'exemple, si on choisit  $\lambda = 0,6 \times 10^{-6}$  m (lumière jaune),  $D = 2$  m et  $s = 1$  mm, on trouve  $i = 1,2$  mm.

## 6.6 Interférence à ondes multiples

Nous avons considéré jusqu'à présent le phénomène d'interférence résultant de la superposition de deux ondes cohérentes. Ce phénomène peut être généralisé au cas où on superpose plusieurs ondes cohérentes (de nombre supérieur à deux). Nous allons considérer

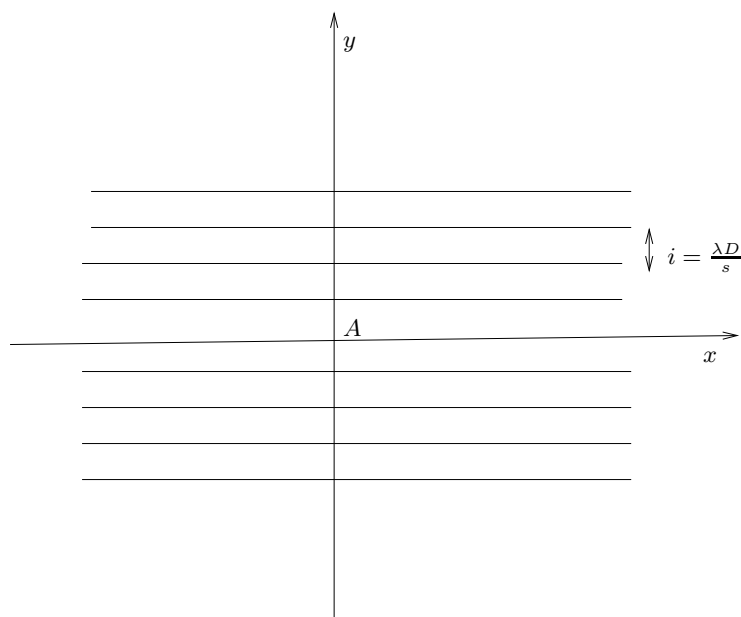


FIGURE 6.10 – Vue schématique de la figure d’interférence dans le cas de deux trous de Young.

dans cette section l’exemple de la lame à faces parallèles qui permet de superposer un grand nombre d’ondes cohérentes.

La lame à faces parallèles peut être utilisée pour étudier l’interférence soit avec des ondes réfléchies soit avec ondes transmises. Nous considérerons ici le cas des ondes transmises.

La lame à faces parallèles, d’indice de réfraction  $n$  et d’épaisseur  $e$ , est placée dans l’air, d’indice de réfraction 1. Nous allons d’abord déterminer la différence de marche entre deux rayons voisins transmis (Fig. 6.11). Un rayon incident sur la première face de la lame (point  $A_1$ ) est partiellement réfléchi et partiellement transmis. Le rayon transmis arrive sur la deuxième face de la lame en  $I_1$  et est à son tour réfléchi et transmis. Le rayon transmis quitte la lame parallèlement au rayon incident. Le rayon réfléchi retourne vers la première face, y subit (point  $A_2$ ) une réflexion et une transmission. Le rayon transmis ressort de la lame à partir de la première face et ne sera plus utilisée par l’expérience. Le rayon réfléchi retourne vers la deuxième face, y subit (point  $I_2$ ) une réflexion et une transmission, etc. Le deuxième rayon transmis par la deuxième face est parallèle au premier rayon transmis par la même face. Ce qui nous intéresse ici, c’est la différence de marche entre ces deux

rayons voisins.

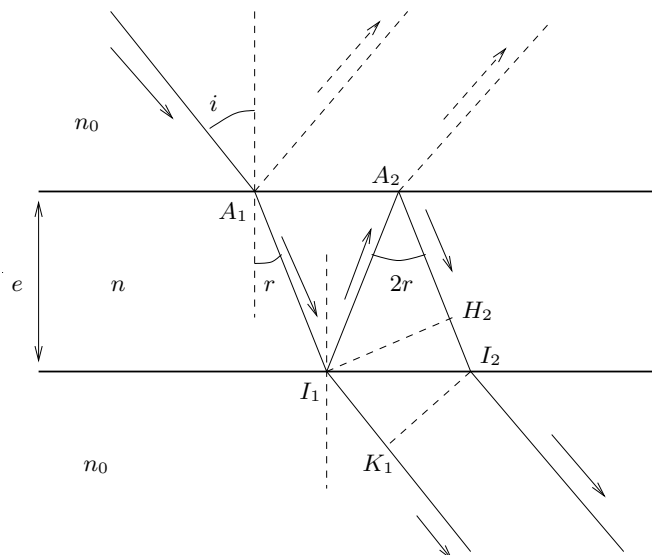


FIGURE 6.11 – Transmission de deux rayons par la lame à faces parallèles.

En plaçant une lentille convergente devant les deux rayons transmis, on peut les faire converger vers un point  $M$  situé sur un écran. En considérant le segment  $I_2K_1$ , orthogonal aux deux rayons transmis et où  $K_1$  se trouve sur le premier rayon transmis, on peut appliquer le théorème de Malus sous sa forme généralisée (cf. fin Sect. 5.6), qui stipule que les chemins optiques de  $I_2M$  et de  $K_1M$  sont égaux :  $[I_2M] = [K_1M]$ . (Bien que les points  $I_2$  et  $K_1$  n'appartiennent pas à la même surface d'onde, puisqu'une différence de marche existe entre eux, les temps de parcours des deux ondes de  $I_2$  à  $M$  et de  $K_1$  à  $M$  sont les mêmes, car elles arrivent en  $M$  au même instant.)

La différence de marche entre les deux rayons transmis est donc donné par la différence des chemins optiques ( $[I_1A_2] + [A_2I_2]$ ) et  $[I_1K_1]$ . En considérant le segment  $I_1H_2$  orthogonal à  $A_2I_2$  et où  $H_2$  est sur le segment  $A_2I_2$ , on peut de nouveau appliquer le théorème de Malus (ou les lois de Snell-Descartes (Sect. 5.9)) et obtenir l'égalité des chemins optiques de  $I_1K_1$  et de  $H_2I_2$  :  $[I_1K_1] = [H_2I_2]$ . Finalement, la différence de marche  $\Delta$  entre les deux rayons transmis est donné par le chemin optique  $[I_1A_2] + [A_2H_2]$  :

$$\Delta = [I_1A_2] + [A_2H_2]. \quad (6.30)$$



En désignant par  $r$  l'angle de réfraction au point  $A_1$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta &= n(I_1A_2 + A_2H_2) = n(I_1A_2 + I_1A_2 \cos(2r)) = \frac{ne}{\cos r}(1 + \cos(2r)) = \frac{ne}{\cos r}2 \cos^2 r \\ &= 2ne \cos r.\end{aligned}\tag{6.31}$$

La différence de marche  $\Delta$  intervient dans le facteur  $k(r_1 - r_2)$  qui apparaît lors des calculs des effets d'interférence [Éq. (6.16)]. On a ici

$$k(r_2 - r_1) = \frac{\omega}{c}([I_1A_2] + [A_2H_2]) = \frac{\omega}{c}\Delta.\tag{6.32}$$

Les rayons transmis par la lame à faces parallèles ne se limitent pas cependant à deux. Le deuxième rayon subissait aussi au point  $I_2$  une réflexion. Ce rayon réfléchi est à son tour réfléchi par la première face en un point  $A_3$  et revient sur la deuxième face en un point  $I_3$  où il subit une réflexion et une transmission, produisant notamment un troisième rayon transmis. On voit ainsi qu'il y aura un nombre très grand, dépendant de la longueur de la lame, de rayons transmis parallèles. Le parcours de tous ces rayons est indiqué sur la Fig. 6.12. En plaçant une lentille convergente devant les rayons sortants, on peut les faire converger en un point  $M$  d'un écran placé devant la lame à une certaine distance. A cause de la différence de marche entre les divers rayons arrivant en  $M$  au même instant, une interférence constructive a lieu entre les ondes ; l'intensité lumineuse en  $M$  varie suivant les valeurs de l'angle d'incidence et de la longueur d'onde.

Le calcul des différences de marche entre rayons voisins se fait de la même façon que le calcul fait plus haut. Le troisième rayon a une différence de marche égale à  $\Delta$  [Éq. (6.31)] par rapport au deuxième rayon, donc une différence de marche égale à  $2\Delta$  par rapport au premier. Le  $j^{\text{e}}$  rayon a une différence de marche égale à  $(j - 1)\Delta$  par rapport au premier, etc.

On peut aussi calculer la différence de marche que subit le premier rayon par rapport au cas où il n'y a pas de lame. Il suffit pour cela de prolonger en ligne droite la trajectoire du rayon incident et de faire un calcul similaire à celui fait plus haut. Si on désigne par  $i$  l'angle d'incidence, le résultat est :

$$\delta = ne \cos r - e \cos i.\tag{6.33}$$

Dans le calcul des expressions des fonctions  $u$  décrivant les ondes, il faut aussi tenir compte des différents facteurs de réflexion et de transmission qui interviennent. Lors de l'incidence

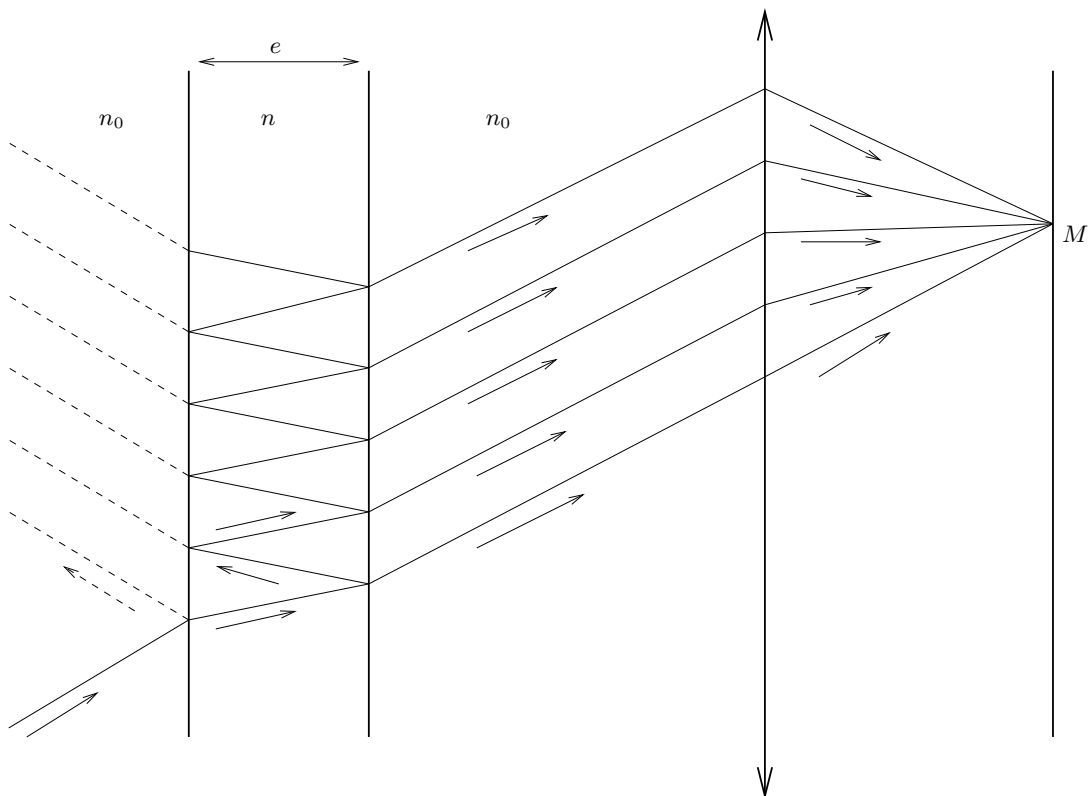


FIGURE 6.12 – Interférence à ondes multiples produite par la lame à faces parallèles. Les rayons transmis par la lame convergent à l'aide d'une lentille en un point  $M$  sur un écran.

d'une onde sur une surface, il y a conservation de l'énergie et par conséquent l'onde réfléchie et l'onde transmise emportent chacune une partie seulement de l'énergie de l'onde incidente. Nous avons rencontré ce problème lors de l'étude des phénomènes de réflexion et de transmission des ondes (Sect. 4.8). Si  $A$  est l'amplitude de l'onde incidente, celles de l'onde réfléchie et transmise seront respectivement  $A\rho$  et  $A\tau$ , où  $\rho$  et  $\tau$  sont en général des coefficients complexes de module inférieur ou égal à 1, et satisfaisant aux conditions de raccordement qui les déterminent complètement. Pour un traitement général, on désigne par 1 le milieu de l'onde incidente, par 2 le milieu interne à la lame et par 3 le milieu de l'onde transmise à l'extérieur de la lame. Le facteur de transmission du milieu 1 au milieu 2 sera désigné par  $\tau_{12}$ , celui du milieu 2 au milieu 3 par  $\tau_{23}$ ; le facteur de réflexion dans le milieu 2 au contact du milieu 1 sera désigné par  $\rho_{21}$ , celui du milieu 2 au contact du milieu 3 par  $\rho_{23}$ .

On désigne par  $\tilde{u}_0$  l'amplitude au point  $M$  et à un instant  $t$  donné de l'onde incidente qui serait arrivée en  $M$  en l'absence de la lame. La première onde transmise par la lame subit deux transmissions, l'une sur la première face et l'autre sur la deuxième. En tenant compte de sa différence de marche  $\delta$  [Éq. (6.33)] par rapport à l'onde incidente sans la présence de la lame, son amplitude au point  $M$  (à l'instant  $t$ ) est :

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_0 \tau_{12} \tau_{23} e^{i\frac{\omega}{c}\delta}. \quad (6.34)$$

L'amplitude de la deuxième onde transmise en  $M$  se calcule à partir de  $\tilde{u}_1$ , des coefficients de réflexion et de la différence de marche  $\Delta$  [Éq. (6.31)] :

$$\tilde{u}_2 = \tilde{u}_1 \rho_{23} \rho_{21} e^{i\frac{\omega}{c}\Delta}. \quad (6.35)$$

L'amplitude de la  $j^{\text{e}}$  onde transmise en  $M$  est :

$$\tilde{u}_j = \tilde{u}_1 \left(\rho_{23} \rho_{21}\right)^{j-1} e^{i\frac{\omega}{c}(j-1)\Delta}. \quad (6.36)$$

Nous nous placerons dans l'approximation où le nombre total  $N$  des ondes transmises est assimilé à l'infini. L'amplitude de l'onde résultante en  $M$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{u}_j = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{u}_1 \left(\rho_{23} \rho_{21}\right)^{j-1} e^{i\frac{\omega}{c}(j-1)\Delta} \\ &= \tilde{u}_1 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\rho_{23} \rho_{21}\right)^{j-1} e^{i\frac{\omega}{c}(j-1)\Delta} \end{aligned}$$

$$= \tilde{u}_1 \left[ 1 + (\rho_{23}\rho_{21}) e^{i\frac{\omega}{c}\Delta} + \dots + (\rho_{23}\rho_{21})^{j-1} e^{i\frac{\omega}{c}(j-1)\Delta} + \dots \right]. \quad (6.37)$$

Il s'agit d'une série géométrique qu'on peut sommer :

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{u}_1}{1 - \rho_{23}\rho_{21} e^{i\frac{\omega}{c}\Delta}} = \frac{\tilde{u}_0 \tau_{12}\tau_{23} e^{i\frac{\omega}{c}\delta}}{1 - \rho_{23}\rho_{21} e^{i\frac{\omega}{c}\Delta}}. \quad (6.38)$$

Lorsque la réflexion se fait dans un milieu en contact avec un milieu d'indice plus faible, le facteur de réflexion  $\rho$  est généralement réel, sans déphasage (Sect. 4.8). Dans le cas où la réflexion se fait dans un milieu en contact avec un milieu d'indice plus élevé, il y a un déphasage de  $\pi$ . On peut écrire dans le cas général  $\rho_{23} = |\rho_{23}|e^{i\varphi_{23}}$  et  $\rho_{21} = |\rho_{21}|e^{i\varphi_{21}}$ . L'intensité de l'onde en  $M$  s'écrit :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \tilde{u} \tilde{u}^* = \frac{1}{2} |\tilde{u}_0|^2 \frac{|\tau_{12}|^2 |\tau_{23}|^2}{1 + |\rho_{21}|^2 |\rho_{23}|^2 - 2|\rho_{21}||\rho_{23}| \cos \varphi} \\ &= I_0 \frac{|\tau_{12}|^2 |\tau_{23}|^2}{(1 - |\rho_{21}||\rho_{23}|)^2 + 4|\rho_{21}||\rho_{23}| \sin^2(\frac{\varphi}{2})}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

où  $\varphi$  a été défini par la relation

$$\varphi = \frac{\omega}{c}\Delta + \varphi_{21} + \varphi_{23} \quad (6.40)$$

et  $I_0$  par  $I_0 = |\tilde{u}_0|^2/2$ .

En revenant au cas d'une lame plongée dans un seul milieu d'indice de réfraction  $n_0$  plus petit que  $n$ , on a  $|\rho_{21}| = |\rho_{23}| \equiv |\rho|$ ,  $\varphi_{21} = \varphi_{23} = 0$ . Le coefficient de réflexion  $R$ , qui est défini à partir de la puissance transmise, peut être obtenu en utilisant les résultats de la Sect. 4.8, en supposant qu'il n'y a pas de perte d'énergie par dissipation et en y remplaçant le paramètre  $\gamma$  par  $n/n_0$ . On trouve  $R = |\rho|^2$ . La relation entre le coefficient de transmission et le facteur de transmission fait intervenir  $n/n_0$ . On avait aussi trouvé que les coefficients de réflexion et de transmission étaient les mêmes si on interchangeait le milieu initial et le milieu final. On obtient :  $T = \frac{n}{n_0} |\tau_{12}|^2 = \frac{n_0}{n} |\tau_{23}|^2$ , de telle sorte que  $|\tau_{12}|^2 |\tau_{23}|^2 = T^2$ . La conservation de la puissance transportée nous donne aussi :  $T = 1 - R$ . L'expression de  $I$  devient :

$$\begin{aligned} I &= I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\frac{\varphi}{2})} = I_0 \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\frac{\varphi}{2})} \\ &= I_0 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\frac{\varphi}{2})}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

L'intensité  $I$  varie suivant les valeurs de la phase  $\varphi$ , qui dépend notamment, d'après les Éqs. (6.40) et (6.31), de l'angle d'incidence et de la longueur d'onde. En variant ces paramètres, on obtient une variation de  $\varphi$  et de  $I$ . L'allure de la fonction  $I$  par rapport aux variations de  $\varphi$  est présentée sur la Fig. 6.13. Les maxima de  $I$  sont produits pour  $\sin(\varphi/2) = 0$ , c'est-à-dire pour  $\varphi = 2m\pi$ , avec  $m$  entier ou nul, pour lesquels  $I = I_0$ . Les minima correspondent à  $\sin^2(\varphi/2) = 1$ , c'est-à-dire pour  $\varphi = (2m + 1)\pi/2$ , avec  $m$  entier ou nul, pour lesquels  $I = I_0(1 - R)^2/(1 + R)^2$ . Le rapport entre le minimum et le maximum est égal à  $(1 - R)^2/(1 + R)^2$ . Pour accentuer le contraste entre les maxima et les minima il est nécessaire d'avoir  $R$  assez grand, par exemple  $0.5 \leq R \leq 1$ , c'est-à-dire, d'après l'Éq. (4.117) et la substitution  $\gamma = n/n_0$ ,  $n/n_0 \gg 1$ ; la lame doit représenter un milieu très réfléchissant. Pour  $R = 0.5$ , le rapport des intensités minimale et maximale est égal à 0,11, tandis que pour  $R = 0.8$  il est égal à 0,01.

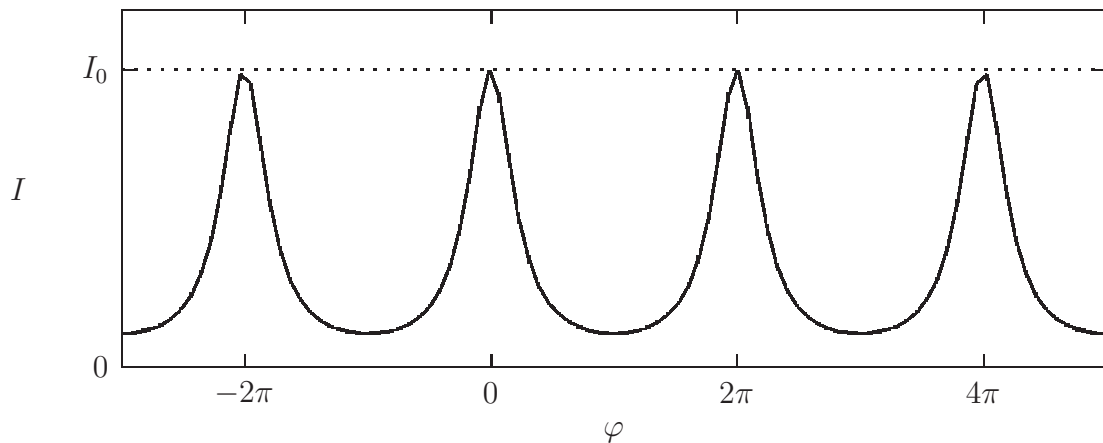


FIGURE 6.13 – Allure de la courbe de l'intensité  $I$  suivant les variations de la phase  $\varphi$  pour le coefficient de réflexion  $R = 0.5$ .

Le verre ordinaire ne vérifie pas cette dernière condition. On a dans ce cas (lame placée dans l'air),  $n/n_0 = 1,52$ , ce qui donne  $R = 0,04$ .  $R$  étant très petit, on peut en fait négliger dans l'expression de  $I$  les puissances de  $R$  d'ordre supérieur à 1. Ceci revient à retenir uniquement les deux premières ondes transmises. L'expression approchée correspondante de  $I$  peut aussi être obtenue de l'Éq. (6.41) en y faisant les développements limités du type  $(1 + z)^\alpha \simeq (1 + \alpha z)$  pour  $|z|$  petit et en retenant uniquement les termes linéaires en

R. On obtient :

$$I \simeq I_0 \left( 1 - 4R \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right). \quad (6.42)$$

On constate qu'ici, la variation relative entre un maximum et un minimum est de l'ordre de 16%.

Une autre façon d'augmenter le coefficient de réflexion  $R$  est de remplacer la lame à faces parallèles par deux lames très minces dont les faces internes sont couvertes d'une fine couche métallique réfléchissante et qui laissent néanmoins traverser partiellement la lumière. Il s'agit de l'appareil de Fabry-Pérot (Fig. 6.14). Les deux faces métallisées sont placées parallèlement face à face. Dans ce cas,  $R$  peut atteindre des valeurs de l'ordre de 0,9. L'intérieur de la lame globale est maintenant rempli d'air ( $n = 1$ ), de telle sorte que la lumière incidente n'est plus réfractée ( $r = i$ ).

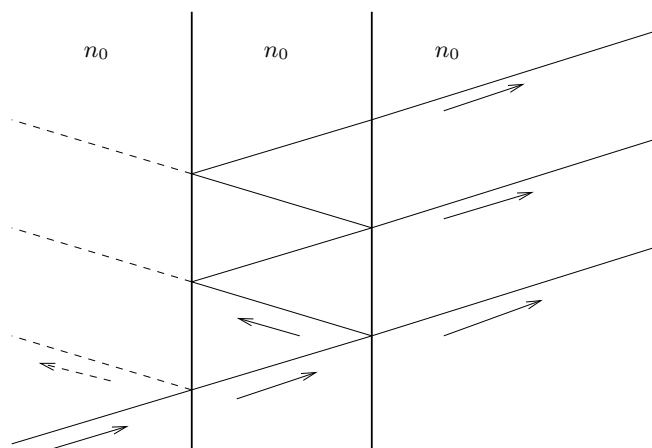


FIGURE 6.14 – Principe de l'appareil de Fabry-Pérot.

Une étude plus fine du phénomène d'interférence avec la lame à faces parallèles pourrait être faite en tenant compte du nombre fini  $N$  des rayons transmis. Dans ce cas, la série (6.37) est finie et contient  $N$  termes :

$$\begin{aligned} \tilde{u} = \tilde{u}_1 \left[ 1 + (\rho_{23}\rho_{21}) e^{i\frac{\omega}{c}\Delta} + \dots + (\rho_{23}\rho_{21})^{j-1} e^{i\frac{\omega}{c}(j-1)\Delta} + \dots \right. \\ \left. + (\rho_{23}\rho_{21})^{N-1} e^{i\frac{\omega}{c}(N-1)\Delta} \right]. \end{aligned} \quad (6.43)$$

En tenant compte du fait que  $(1 + x + x^2 + \dots + x^{N-1}) = (1 - x^N)/(1 - x)$ , la somme

précédente peut être regroupée sous une forme compacte :

$$\tilde{u} = \tilde{u}_1 \frac{1 - (\rho_{23}\rho_{21})^N e^{\frac{i\omega}{c}N\Delta}}{1 - \rho_{23}\rho_{21} e^{\frac{i\omega}{c}\Delta}}. \quad (6.44)$$

En poursuivant les calculs comme précédemment, on aboutit à l'expression suivante de l'intensité :

$$I = I_0 \frac{(1 - R^N)^2 + 4R^N \sin^2(\frac{N\varphi}{2})}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\frac{\varphi}{2})}, \quad (6.45)$$

qui remplace maintenant l'Éq. (6.41). Comme en général  $R < 1$ , il existe un nombre  $N_0$ , dépendant de  $R$ , à partir duquel ( $N > N_0$ )  $R^N$  devient complètement négligeable au niveau expérimental. Par exemple, pour  $R = 0,5$  et  $N = 8$ , on a  $R^N = 4 \times 10^{-3}$ , et pour  $R = 0,8$  et  $N = 24$ ,  $R^N = 5 \times 10^{-3}$ . La fonction  $\sin^2(\frac{N\varphi}{2})$  étant une fonction rapidement oscillante, son influence se manifeste par la présence de petites oscillations d'amplitude  $R^N$  le long de la courbe définie par l'Éq. (6.41). Les maxima absolus de l'intensité sont égaux à  $I_0(1 - R^N)$ . Tous ces effets ne sont visibles que pour de petites valeurs de  $N$ . La fig. 6.15 représente l'allure de la fonction  $I(\varphi)$  pour  $R = 0,5$  et  $N = 4$ .

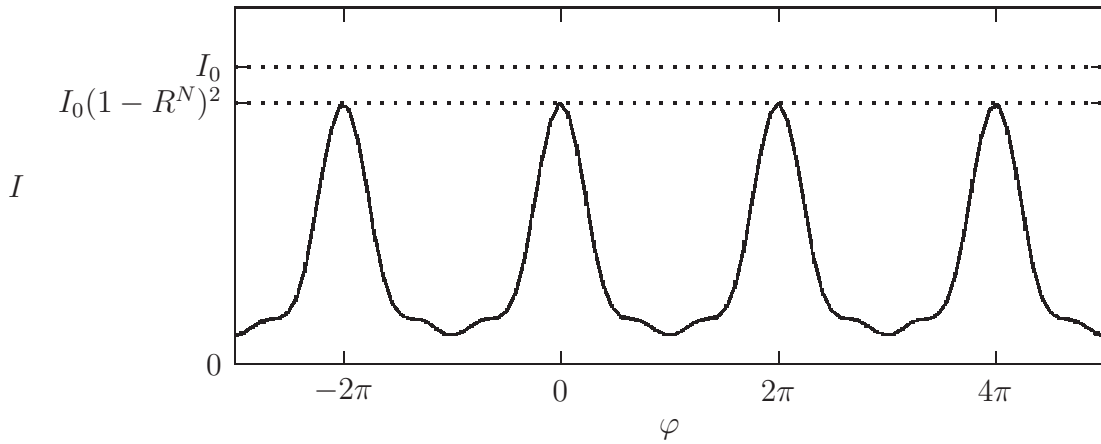


FIGURE 6.15 – Allure de la courbe de l'intensité  $I$  suivant les variations de la phase  $\varphi$  pour le coefficient de réflexion  $R = 0.5$  et un nombre de rayons transmis  $N = 4$ .

En conclusion, le phénomène d'interférence représente l'un des aspects les plus saillants de la propagation des ondes et permet la détermination expérimentale de plusieurs de leurs paramètres et coefficients caractéristiques.