



# Licence de Physique

## Milieux conducteurs, diélectriques et magnétiques

Bertrand Berche  
Laboratoire de Physique des Matériaux,  
Université Henri Poincaré, Nancy 1

# Electromagnétisme des milieux

## Sommaire

<b>Introduction : Description des théories physiques</b> . . . . .	3
1. Schéma simplifié de la physique du XIXème siècle . . . . .	3
2. Évolution des théories des champs, interactions fondamentales . . . . .	4
2.1. Cadre général . . . . .	4
2.2. L'interaction gravitationnelle . . . . .	6
2.3. L'interaction électrique . . . . .	10
2.4. L'interaction forte . . . . .	16
2.5. L'interaction faible . . . . .	18
2.6. Unification des interactions . . . . .	19
3. Évolution des théories dynamiques . . . . .	21
4. Systèmes à grand nombre de degrés de liberté . . . . .	22
<b>Chapitre 1 : Electromagnétisme dans le vide</b> . . . . .	23
1. Equations de Maxwell dans le vide . . . . .	23
2. Principes variationnels en théorie classique des champs . . . . .	24
2.1. Le principe de moindre action en mécanique analytique . . . . .	24
2.2. Principe variationnel en électrostatique . . . . .	26
2.3. Le condensateur cylindrique . . . . .	27
2.4. Formulation variationnelle de l'électromagnétisme . . . . .	28
2.4.1. Densité lagrangienne . . . . .	28
2.4.2. Equations d'Euler – Lagrange généralisées . . . . .	29
2.4.3. Propagation des potentiels . . . . .	29
<b>Chapitre 2 : Notions élémentaires d'électrostatique</b> . . . . .	31
1. Charges ponctuelles et distributions de charges ponctuelles . . . . .	31
1.1. Force coulombienne entre deux charges . . . . .	31
1.2. Énergie potentielle d'un système de deux charges . . . . .	32

1.3. Charge test unité ( $q' = 1$ ) : définition du potentiel électrostatique et du champ électrique . . . . .	33
1.4. Lignes de champ et équipotentiels . . . . .	34
2. Systèmes de charges ponctuelles . . . . .	36
2.1. Superposition des potentiels et des champs . . . . .	36
2.2. Symétries et invariances . . . . .	37
3. Distributions continues de charges . . . . .	38
3.1. Comportements asymptotiques . . . . .	38
3.2. Théorème de superposition scalaire pour le potentiel . . . . .	39
3.3. Exemples . . . . .	41
3.3.1. <i>Fil circulaire chargé</i> . . . . .	41
3.3.2. <i>Disque chargé</i> . . . . .	42
3.4. Théorème de superposition vectorielle pour le champ électrique . . . . .	42
3.5. Exemple du fil circulaire . . . . .	43
4. Théorème de Gauss . . . . .	44
4.1. Énoncé et intérêt . . . . .	44
4.2. Applications . . . . .	46
4.2.1. <i>Champ et potentiel à l'extérieur d'une distribution sphérique quelconque</i> . . . . .	46
4.2.2. <i>Champ et potentiel à l'intérieur d'une distribution sphérique quelconque</i> . . . . .	47
4.2.3. <i>Sphères uniformément chargées</i> . . . . .	47
4.2.4. <i>Cylindre chargé</i> . . . . .	48
4.2.5. <i>Limites à l'utilisation du théorème de Gauss</i> . . . . .	49
4.3. Atome d'hydrogène . . . . .	49
4.4. Conséquences : première équation de Maxwell et équation de Poisson . . . . .	51
4.5. Discontinuité de $\mathbf{E}$ à travers une surface chargée . . . . .	52
4.5.1. <i>Relations de passage</i> . . . . .	52
4.5.2. <i>Champ au voisinage d'un conducteur et pression électrostatique</i> . . . . .	53
5. Energie électrostatique . . . . .	54
5.1. Energie potentielle d'une charge $q$ dans le champ créé par un système de charges . . . . .	54
5.2. Energie électrostatique d'un système de charges ponctuelles . . . . .	55
5.3. Systèmes de charges réparties . . . . .	55
5.4. Ordres de grandeur en physique atomique et en astrophysique . . . . .	57
6. Structure formelle de l'électrostatique . . . . .	59
<b>Chapitre 3 : Milieux conducteurs et diélectriques . . . . .</b>	<b>63</b>
1. Milieux conducteurs . . . . .	63
1.1. Structure et propriétés élémentaires des conducteurs et isolants à l'équilibre . . . . .	63
1.1.1. <i>Champ et potentiel au sein d'un conducteur</i> . . . . .	63
1.1.2. <i>Influence, condensateurs, capacité</i> . . . . .	64
1.2. Courant électrique . . . . .	67
1.2.1. <i>Modèle de Drude de la conductivité électrique</i> . . . . .	67
1.2.2. <i>Notion de résistance</i> . . . . .	69
1.2.3. <i>Résistance de fuite</i> . . . . .	69
1.2.4. <i>Régimes variables</i> . . . . .	70
1.3. Energie d'un système de conducteurs dans le vide . . . . .	70
1.4. Force agissant sur un conducteur . . . . .	71
2. Méthodes de résolution de l'équation de Laplace . . . . .	71
2.1. Théorème d'unicité . . . . .	71
2.2. Méthode des images électriques . . . . .	72
2.3. Séparation des variables . . . . .	72

2.3.1. Coordonnées cartésiennes . . . . .	72
2.3.2. Coordonnées sphériques . . . . .	74
2.4. Transformations conformes . . . . .	76
2.5. Solutions numériques . . . . .	78
3. Milieux diélectriques . . . . .	79
3.1. Introduction . . . . .	79
3.2. Le dipôle électrostatique . . . . .	79
3.2.1. Potentiel et champ du dipôle . . . . .	79
3.2.2. Développements multipolaires . . . . .	80
4. Processus microscopiques de polarisation . . . . .	84
4.1. Milieux non polaires . . . . .	84
4.1.1. Polarisation électronique induite . . . . .	85
4.1.2. Polarisation ionique induite . . . . .	86
4.1.3. Réponse dynamique . . . . .	87
4.1.4. Polarisation d'interface . . . . .	88
4.2. Milieux polaires . . . . .	88
4.2.1. Polarisation d'orientation dans les fluides . . . . .	88
4.2.2. Polarisation d'orientation dans les cristaux ioniques . . . . .	90
5. Approche macroscopique de l'électromagnétisme dans les milieux diélectriques . . . . .	90
5.1. Champ de polarisation, champs macroscopique et microscopique, champ local, polarisation . . . . .	90
5.2. Champ de Lorentz . . . . .	92
5.3. Milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes . . . . .	93
5.4. Charges de polarisation . . . . .	94
5.5. Courants de polarisation . . . . .	96
5.6. Equations de Maxwell dans les milieux diélectriques . . . . .	96
5.7. Equation de Laplace et milieux diélectriques . . . . .	97
6. Calcul de la constante diélectrique . . . . .	100
6.1. Milieux non polaires et formule de Clausius-Mossotti-Lorentz . . . . .	100
6.2. Milieux polaires et formule d'Onsager . . . . .	102
7. Milieux non linéaires ou anisotropes . . . . .	102
7.1. Milieux diélectriques non linéaires : ferroélectricité . . . . .	102
7.1.1. Instabilité ferroélectrique . . . . .	102
7.1.2. Transition ferroélectrique du titanate de baryum . . . . .	103
7.2. Milieux diélectriques anisotropes : cristaux liquides . . . . .	103
8. Energie électrostatique des milieux diélectriques . . . . .	106
8.1. Travail élémentaire . . . . .	106
8.2. Fonctions thermodynamiques . . . . .	107

## Chapitre 4 : Magnétostatique dans le vide . . . . . 109

1. Force de Lorentz, effet Hall, force de Laplace . . . . .	109
1.1. Force de Lorentz . . . . .	109
1.2. Conséquences . . . . .	110
1.2.1. Pulsation cyclotron . . . . .	110
1.2.2. Effet Hall . . . . .	110
1.2.3. Force de Laplace . . . . .	111
2. Champ $\mathbf{B}$ produit par un courant continu . . . . .	112
2.1. Loi de Biot et Savart . . . . .	112
2.2. Théorème de Gauss . . . . .	113
2.3. Potentiel vecteur . . . . .	114

2.4. Théorème d'Ampère . . . . .	115
2.5. Conséquences des équations de Maxwell . . . . .	118
3. Énergie magnétique . . . . .	119
3.1. Coefficients d'inductance . . . . .	119
3.2. Énergie . . . . .	122
4. Analogies électrostatique-magnétostatique . . . . .	124

## Chapitre 5 : Magnétostatique des milieux magnétiques . 125

1. Dipôle magnétique . . . . .	125
1.1. Dipôle magnétique élémentaire . . . . .	125
1.2. Potentiel scalaire magnétique . . . . .	128
2. Aspects microscopiques du magnétisme dans la matière . . . . .	129
2.1. Moments magnétiques des atomes et des ions . . . . .	129
2.1.1. <i>Moment orbital</i> . . . . .	129
2.1.2. <i>Moment cinétique de spin</i> . . . . .	130
2.1.3. <i>Moment cinétique total</i> . . . . .	130
2.1.4. <i>Règle de Hund</i> . . . . .	131
2.2. Matériaux diamagnétiques . . . . .	132
2.3. Matériaux paramagnétiques . . . . .	135
2.4. Magnétisme des électrons libres . . . . .	137
2.5. Refroidissement par désaimantation adiabatique . . . . .	138
2.6. Ferromagnétisme . . . . .	141
2.6.1. <i>Description expérimentale</i> . . . . .	141
2.6.2. <i>Théorème de van Leeuwen</i> . . . . .	142
2.6.3. <i>Origine de l'énergie d'échange ferromagnétique</i> . . . . .	143
2.6.4. <i>Antiferromagnétisme</i> . . . . .	148
2.6.5. <i>Théorie de Weiss de la transition ferromagnétique</i> . . . . .	148
2.7. Matériaux supraconducteurs . . . . .	154
2.7.1. <i>Description expérimentale</i> . . . . .	154
2.7.2. <i>Effet Meissner, équation de London</i> . . . . .	155
2.7.3. <i>Les équations de Ginzburg-Landau</i> . . . . .	157
3. Approche macroscopique de l'électromagnétisme dans la matière et à l'extérieur de matériaux magnétiques . . . . .	161
3.1. Les courants ampériens $\mathbf{j}^*$ et $\mathbf{j}_S^*$ . . . . .	161
3.2. Masses magnétiques . . . . .	162
3.3. Calcul du champ $\mathbf{B}$ créé par la matière aimantée . . . . .	163
3.3.1. <i>Absence de champ appliqué</i> . . . . .	163
3.3.2. <i>Sous champ appliqué</i> . . . . .	165
3.4. Milieu magnétique linéaire, homogène et isotrope . . . . .	167
3.5. Équations de Maxwell dans les milieux . . . . .	167
4. Energie magnétique des milieux magnétiques . . . . .	168
4.1. Travail élémentaire d'aimantation . . . . .	168
4.2. Fonctions thermodynamiques . . . . .	168

# Mise en garde et notations

Le chapitre introductif propose une présentation des théories physiques et de leurs relations. Le chapitre 1 présente une formulation variationnelle de l'électromagnétisme, à titre culturel. Les chapitres 2 et 4 ne comportent que des rappels de DEUG, le corps du programme étant constitué par les chapitres 3 et 5. Les remarques ou applications en caractères sanserif peuvent être laissés de côté en première lecture, ils présentent parfois des notions délicates.

## Notations utilisées

Notation	Dimensions des grandeurs physiques	Unités	
$\mathcal{C}$	quantité homogène à une charge électrique	coulomb	C
$\mathcal{L}$	quantité homogène à une longueur	mètre	m
$\mathcal{M}$	quantité homogène à une masse	kilogramme	kg
$\mathcal{T}$	quantité homogène à une durée	seconde	s
$\Theta$	quantité homogène à une température	température	K
$[\varepsilon_0]$	$\mathcal{M}^{-1} \mathcal{L}^{-2} \mathcal{T}^2 \mathcal{C}^2$	farad par mètre	F.m <sup>-1</sup>
$[\mu_0]$	$\mathcal{M} \mathcal{L} \mathcal{C}^2$	henry par mètre	H.m <sup>-1</sup>
$[F]$	$\mathcal{M} \mathcal{L} \mathcal{T}^{-2}$	newton	N
$[U]$	$\mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-2}$	joule	J
$[V]$	$\mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-2} \mathcal{C}^{-1}$	volt	V
$[E]$	$\mathcal{M} \mathcal{L} \mathcal{T}^{-2} \mathcal{C}^{-1}$	volt par mètre	V.m <sup>-1</sup>
$[p]$	$\mathcal{L} \mathcal{C}$	coulomb mètre	C.m
$[\rho]$	$\mathcal{L}^{-3} \mathcal{C}$	coulomb par mètre cube	C.m <sup>-3</sup>
$[\sigma]$	$\mathcal{L}^{-2} \mathcal{C}$	coulomb par mètre carré	C.m <sup>-2</sup>
$[\lambda]$	$\mathcal{L}^{-1} \mathcal{C}$	coulomb par mètre	C.m <sup>-1</sup>
$[j]$	$\mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1} \mathcal{C}$	ampère par mètre carré	A.m <sup>-2</sup>
$[I]$	$\mathcal{T}^{-1} \mathcal{C}$	ampère	A
$[\gamma]$	$\mathcal{M}^{-1} \mathcal{L}^{-3} \mathcal{T} \mathcal{C}^2$	siemens par mètre	S.m <sup>-1</sup>
$[C]$	$\mathcal{M}^{-1} \mathcal{L}^{-2} \mathcal{T}^2 \mathcal{C}^2$	farad	F
$[R]$	$\mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1} \mathcal{C}^{-2}$	ohm	$\Omega$
$[G]$	$\mathcal{M}^{-1} \mathcal{L}^{-2} \mathcal{T} \mathcal{C}^2$	siemens	S
$[L]$	$\mathcal{M} \mathcal{L}^2 \mathcal{C}^2$	henry	H

Notation	Signification
Repérage des positions	
$O$	Origine d'un repère
$M$	Point d'observation
$\mathbf{u}_{x_i}$	vecteur unitaire (accroissement infinitésimal de la coordonnée $x_i$ )
$\mathbf{r} = \mathbf{OM}$	vecteur repérant le point d'observation
$\mathbf{r}_i$ ou $\mathbf{r}_{i,M} = \mathbf{O}_i\mathbf{M}$	vecteur repérant le point d'observation depuis une charge discrète
$\mathbf{R}$	vecteur repérant l'élément source chargé
$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$	vecteur separant le point d'observation de la charge source
$x, y, z$	coordonnées cartésiennes pour repérer un point
$r, \varphi, z$	coordonnées cylindriques pour repérer un point
$r, \theta, \varphi$	coordonnées sphériques pour repérer un point
$d\mathbf{r}$	déplacement élémentaire
$d\mathbf{r} = dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z$	coordonnées cartésiennes
$d\mathbf{r} = dr \mathbf{u}_r + r d\varphi \mathbf{u}_\varphi + dz \mathbf{u}_z$	coordonnées cylindriques
$d\mathbf{r} = dr \mathbf{u}_r + r d\theta \mathbf{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \mathbf{u}_\varphi$	coordonnées sphériques
$d\ell, dx, dr$	élément de longueur
$d\mathbf{S}$	élément de surface
$d\tau$	élément de volume
$S$	surface
$\Sigma$	surface fermée
Grandeurs électriques	
$q$	charge électrique
$\Omega$	Système chargé
$\epsilon_0$	permittivité du vide
$\mu_0$	perméabilité du vide
$\mathbf{F}_{q \rightarrow q'}$	force coulombienne exercée par $q$ sur $q'$
$\mathcal{U}_{q \rightarrow q'}$	énergie potentielle du système $q$ et $q'$
$\mathbf{E}_q$	champ électrique créé par $q$
$\mathbf{E}_\Omega$	champ électrique créé par $\Omega$
$\phi_q$	potentiel électrique créé par $q$
$\phi_\Omega$	potentiel électrique créé par $\Omega$
$\Phi_\Sigma(\mathbf{E})$	flux du champ $\mathbf{E}$ à travers la surface $\Sigma$
$\mathbf{p}$	moment dipolaire
$\rho$	densité volumique de charges
$\sigma$	densité surfacique de charges
$\lambda$	densité linéique de charges
$\mathbf{j}$	densité de courant
$\mathbf{v}$ dérive	vitesse moyenne des charges
$I$	intensité du courant
$U$	tension électrique
$I(t)$ ou $U(t)$	intensité et tension en régime variable
$\gamma$	conductivité électrique
$C$	capacité
$R$	résistance électrique
$G$	conductance
$\mathbf{B}$	champ magnétique
$\mathbf{A}$	potentiel vecteur
$\mu$	moment magnétique
$L$	auto-inductance

# Introduction

## Description des théories physiques

*Les attractions de la gravité, du magnétisme et de l'électricité, s'étendent jusqu'à des distances fort sensibles ; c'est pour cela qu'elles ont été observées par des yeux vulgaires : il peut y avoir d'autres attractions qui s'étendent à de si petites distances qu'elles ont échappé jusqu'ici à nos observations.*

Isaac Newton, *Traité d'optique*, 1675

## 1. Schéma simplifié de la physique du XIXème siècle

La MÉCANIQUE (Newton, 1687) est une théorie de la **dynamique** qui régit l'évolution temporelle des degrés de liberté décrivant un système. On peut en formuler l'objet de manière assez générale sous la forme :

*Étant donnés des conditions initiales et des champs de forces, trouver les trajectoires des points matériels.*

Avec cette définition restrictive de la mécanique, la donnée des champs de forces provient d'une autre théorie, en dehors du contexte strict de la mécanique (exemples : gravitation ou force de Coulomb). L'équation d'évolution temporelle est le principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

où  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  est une quantité dynamique définie par la CINÉMATIQUE,  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ , et par une propriété des particules,  $m$ , la masse inertielle.

L'ÉLECTROMAGNÉTISME (Maxwell, 1864) est une théorie des **champs** (et de leur évolution dans l'espace et le temps) créés par des **sources** appelées charges électriques. Son objet peut s'exprimer sous la forme



Étant donnée une distribution de charges,  $q_i$ , (et leurs positions,  $\mathbf{r}_i$ , et vitesses,  $\mathbf{v}_i$ ), trouver les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  qu'elles produisent.

Les équations fondamentales sont celles de Maxwell :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \left( \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Ces équations entraînent une équation de propagation des champs à la vitesse  $c = \sqrt{1/\varepsilon_0\mu_0}$ , l'électromagnétisme est donc aussi une théorie des ondes électromagnétiques.

Pour connaître l'effet des champs sur des systèmes de particules chargées et suivre l'évolution temporelle de ces particules par la mécanique, il est nécessaire d'introduire un COUPLAGE entre les deux théories. Dans le cas de l'électromagnétisme, le couplage est fourni par l'équation de Lorentz (1920)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}). \quad (3)$$

On peut donc proposer un schéma assez général d'une théorie physique, valable dans un contexte donné (déterminé par les échelles de longueur par exemple) qui dépend de la nature du problème étudié :

*Une THÉORIE DES CHAMPS définit des **sources** et les **champs** qu'elles créent. Une théorie DYNAMIQUE régit l'évolution temporelle des **degrés de liberté** des particules soumis à des champs de forces. Un cadre complet est assuré dès lors que l'on sait coupler les deux théories par une INTERACTION, les forces étant définies à partir des champs créés par les sources.*

**Tableau 0.1** Une esquisse d'une théorie classique de la dynamique de systèmes de particules chargées en interaction.

Maxwell	Lorentz	Newton
Électromagnétisme	Couplage	Mécanique
$q_i, \mathbf{j}_i$	$\mathbf{F}_i = q_i(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B})$	$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i$
↓	↔	↓
$\mathbf{E}, \mathbf{B}$		$\mathbf{r}_i(t), \mathbf{v}_i(t)$

On pourrait bien entendu proposer un schéma analogue en choisissant la gravitation comme théorie des champs dont les sources sont les distributions de masses qui créent les champs de forces de gravitation.

## 2. Évolution des théories des champs, interactions fondamentales

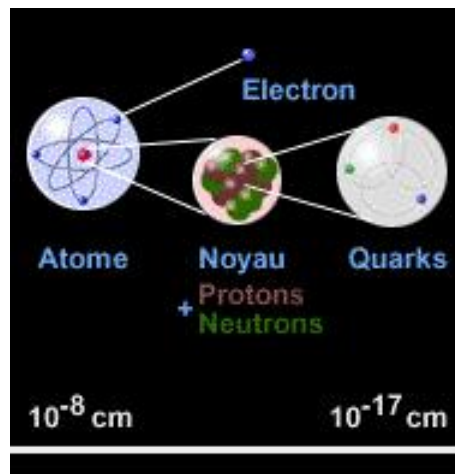
### 2.1. Cadre général

En dépit de l'extrême complexité des phénomènes physiques observables, quatre **interactions fondamentales** et les théories des champs qui leur sont associées permettent d'expliquer la grande majorité des phénomènes physiques sur des échelles de longueur aussi variées que  $10^{-16} - 10^{-15}$  m (taille caractéristique du noyau) à  $10^{26} - 10^{27}$  m (taille caractéristique de l'Univers).

Dans une description élémentaire, les concepts-clés intervenant dans ces théories sont

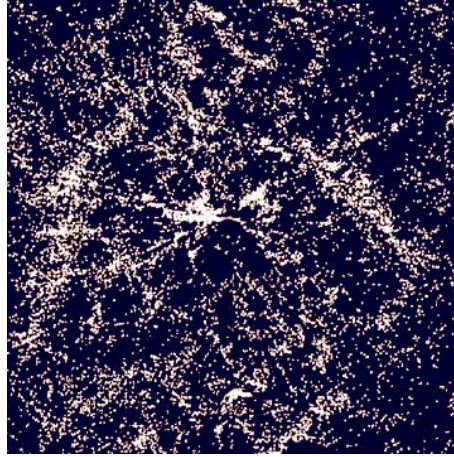
- i) La source  $g$ ,
- ii) Le potentiel (champ scalaire) et le champ (champ vectoriel) qu'elles créent, soit  $\phi_g(r)$  et  $\mathbf{E}_g(r)$ ,
- iii) Le couplage avec une théorie dynamique est possible lorsque l'on sait définir l'énergie potentielle d'une source test  $g$  dans un champ donné créé par un système de sources  $\Omega$ ,  $\mathcal{U}_{\Omega \rightarrow g}(r) = g\phi_{\Omega}(r)$ . On sait en effet que la dynamique montre qu'une particule se déplace vers le minimum de l'énergie potentielle sous l'effet d'une force  $\mathbf{F}_{\Omega \rightarrow g}(r) = -\frac{d\mathcal{U}_{\Omega \rightarrow g}}{dr}\mathbf{u}_r$ , où  $\mathbf{u}_r$  est orienté dans le sens des  $r$  croissants.
- iv) Une constante caractérisant l'intensité de l'interaction. Sa valeur est ajustée pour rendre compte des résultats expérimentaux et dépend du choix du système d'unités choisi.

Un bon paramètre pour mettre en évidence la manifestation des différentes interactions est celui de l'échelle de longueur caractéristique du phénomène étudié : chaque interaction se manifeste plus particulièrement dans une certaine gamme d'échelles de longueurs <sup>(1)</sup>. Par exemple à l'échelle de l'atome ou de la molécule, l'interaction électrique domine très largement l'interaction gravitationnelle qui est alors négligeable. A l'échelle du système solaire en revanche, les objets macroscopiques étant neutres électriquement, l'interaction électrique est négligeable devant la gravitation que des effets cumulatifs rendent prépondérante. Aux échelles de longueur "frontière", les deux interactions doivent être prises en compte pour expliquer certains phénomènes. La hauteur typique d'une montagne sur une planète résulte par exemple de la compétition entre interactions électrique et gravitationnelle sur la planète en question. Plus une planète est légère, plus une montagne peut être élevée car sa hauteur maximale est atteinte lorsque la gravitation parvient à compenser la cohésion du solide essentiellement dictée par des effets électriques.



**Figure 0.1** Les plus petites échelles de longueur connues.

<sup>(1)</sup> Cela ne signifie pas nécessairement qu'elle n'existe pas en dehors de ce domaine, mais plutôt qu'elle y est masquée pour diverses raisons.



**Figure 0.2** Le photographie de la zone la plus grande jamais observée. Chacun des 9325 points est une galaxie analogue à la notre qui contient quelques centaines ou milliers de milliards d'étoiles comme le soleil (tiré du serveur sur les puissances de 10 au CERN <http://cern.web.ch/CERN/Microcosm/P10/french/welcome.html>).

## 2.2. L'interaction gravitationnelle

En 1687, dans les *Principia mathematica*, Newton élabore les fondements de la dynamique et de la gravitation. “Tous” les corps possèdent une caractéristique fondamentale appelée masse gravitationnelle<sup>(2)</sup>. C'est une quantité positive et extensive qui s'exprime en kg.

Un corps de masse  $m$  crée en tout point de l'espace un potentiel gravitationnel  $\phi_m(r)$  appelé potentiel newtonien :

$$\phi_m(r) = -G \frac{m}{r}. \quad (4)$$

Il est lié à l'énergie gravitationnelle que possède une particule test de masse  $m'$  située dans le voisinage de  $m$  :

$$\mathcal{U}_{m \rightarrow m'}(r) = m' \phi_m(r) = -G \frac{mm'}{r}. \quad (5)$$

Entre ces deux masses  $m$  et  $m'$  s'exerce une force gravitationnelle qui est toujours attractive. Elle dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$\mathbf{F}_{m \rightarrow m'}(r) = -\nabla \mathcal{U}_{m \rightarrow m'}(r) = -G \frac{mm'}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (6)$$

La constante universelle de la gravitation vaut

$$G = 6.67259(85) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}. \quad (7)$$

La gravitation est une interaction de faible intensité, mais qui domine à l'échelle de l'univers (astronomie, cosmologie). On caractérise l'intensité des interactions par des constantes de structure, quantités sans dimension (dont la valeur numérique reste donc inchangée quel que soit le système d'unités choisi). Pour la gravitation, c'est

$$\alpha_m = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} = 6.10^{-39}, \quad (8)$$

<sup>(2)</sup> L'égalité entre la masse gravitationnelle et la masse inerte, résultat qui découle de l'observation expérimentale mais n'admet pas d'interprétation, constitue le principe d'équivalence qui fonde la théorie de la relativité générale.

avec la masse du proton  $m_p = 1.6726231(10) \times 10^{-27}$  kg, la constante de Planck  $\hbar = 1.05457266(63) \times 10^{-34}$  J.s et la vitesse de la lumière  $c \equiv 2.99792458 \times 10^8$  m.s<sup>-1</sup>.

### Remarques :

i) Le principe d'équivalence postule l'égalité de la masse inertielle et de la masse gravitationnelle. Ce résultat est un fait d'expérience qui n'admet pas à l'heure actuelle d'explication satisfaisante. On peut cependant en donner une interprétation possible. En 1872, Ernst Mach (1838-1916) énonce que ce n'est pas l'accélération absolue, mais relativement à la matière éloignée, qui détermine les propriétés inertielles de la matière. L'origine de l'égalité des masses inertielle et gravitationnelle peut être comprise par cet argument :

*Il ne peut exister, à mon avis, que des mouvements relatifs. Quand un corps tourne par rapport aux étoiles, les forces centrifuges sont engendrées ; quand un corps tourne par rapport à un autre corps, mais pas par rapport aux étoiles, aucune force centrifuge n'est engendrée. (...) Apparemment, il est sans importance que nous admettions que la Terre tourne autour de son axe par rapport aux étoiles fixes, ou que ce soit les étoiles dites fixes qui tournent autour de la Terre. Géométriquement, cela produit le même cas de rotation relative entre la Terre et les étoiles. Mais si nous croyons que ce sont véritablement les étoiles qui tournent autour de la Terre, on ne devrait pas observer la déviation du pendule de Foucault, ni l'applatissage de la Terre, etc. - du moins, d'après notre conception usuelle des lois de l'inertie. Cette difficulté peut être résolue de deux façons. Soit tout mouvement est absolu, soit notre loi de l'inertie est mal exprimée. Je préfère la deuxième solution. La loi de l'inertie devrait être conçue de telle manière que les mêmes phénomènes puissent être observés comme conséquence d'une rotation relative, avec la Terre tournante et les étoiles immobiles, et vice versa. Cela suppose que la loi d'inertie, exprimée de cette façon, doit tenir compte de toutes les masses dans l'Univers <sup>(3)</sup>.*

On peut résumer l'expérience de Mach de la façon suivante. Se tenant debout, par une nuit étoilée, à observer le ciel, les bras ballants le long du corps, un observateur se met à tourner autour de lui-même. Deux phénomènes se produisent alors : les étoiles se mettent à tourner et les bras de l'observateur s'écartent de l'axe de rotation. Pour Mach il est impensable que ces deux événements soient déconnectés et il doit être possible de développer une physique des référentiels accélérés où les étoiles en rotation exercent une force inertielle sur les bras. L'argument conduit à interpréter la masse inertielle d'un corps comme le résultat de son interaction gravitationnelle avec le reste de l'Univers. Cet énoncé constitue le Principe de Mach. La mécanique de laboratoire s'avère liée à la cosmologie.

Le référentiel héliocentrique, dont l'origine est située au centre de gravité du système solaire et dont les axes pointent dans les directions d'étoiles "fixes", est considéré galiléen en très bonne approximation. La relation fondamentale de la dynamique y prend donc la forme habituelle

$$\sum \mathbf{F} = m\gamma,$$

où  $\gamma$  représente l'accélération (absolue) de la masse relativement au référentiel galiléen. Si l'on se place dans le référentiel terrestre, en rotation par rapport au référentiel héliocentrique, aux forces objectives (*i.e.* qui sont indépendantes du référentiel) on ajoute des forces d'inertie (force d'inertie d'entraînement et force de Coriolis) :

$$\sum \mathbf{F} - m\gamma_e - m\gamma_c = m\gamma,$$

responsables par exemple de la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault. Selon Mach, cet effet d'inertie peut aussi bien être interprété comme résultant de l'interaction gravitationnelle du pendule avec les étoiles fixes. On peut en donner une argumentation

qualitative simple<sup>(4)</sup>. Dans la description newtonienne, un corps de masse  $m$  soumis à une force  $\mathbf{F}$  possède une accélération  $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$  par rapport à un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ . Considérons maintenant le mouvement de ce même corps par rapport au référentiel accéléré  $\mathcal{R}'$  de sorte que son accélération soit nulle  $\mathbf{a}' = \mathbf{0}$  dans  $\mathcal{R}'$ . D'après Mach, on doit pouvoir expliquer cette accélération par l'action de forces  $\mathbf{F}' = -\mathbf{F} = -m\mathbf{a}$ , tout comme dans  $\mathcal{R}$ , avec  $m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}'$ , où  $\mathbf{F}'$  doit provenir de l'accélération du reste de l'Univers par rapport à  $\mathcal{R}'$ , puisque cette accélération existe dans  $\mathcal{R}'$  et pas dans  $\mathcal{R}$ . Considérons la contribution à  $\mathbf{F}'$  d'une galaxie de masse  $M$ . La force gravitationnelle statique habituelle de Newton,  $GMm/r^2$ , sommée sur tout l'Univers, a une contribution essentiellement nulle du fait de l'isotropie observable de l'Univers. De plus, cette interaction ne dépend pas de l'accélération et ne peut donc pas rendre compte de  $\mathbf{F}'$ . Si l'on demande en revanche que la gravitation soit au moins compatible avec la Relativité Restreinte, elle doit, dans sa structure, être semblable à l'électromagnétisme. On sait en effet que la force gravitationnelle statique est analogue à la force de Coulomb, mais dans le cas des charges, si  $q_1$  et  $q_2$  ont une accélération relative, il apparaît une force supplémentaire (rayonnement d'une charge accélérée)  $F_{\text{acc.}} = q_1 q_2 a / 4\pi\epsilon_0 c^2 r$ . Pour la gravitation, c'est ce type de force (appelée loi de l'induction inertielle par Sciama et devant donner lieu à des ondes gravitationnelles) qui doit être à l'origine de  $\mathbf{F}'$  :

$$F' = GMma/c^2 r.$$

La décroissance lente en  $\frac{1}{r}$  est satisfaisante car elle montre que les corps éloignés ont une contribution plus forte qu'à l'interaction statique. En sommant sur l'Univers observable, on obtiendra  $F'^{(5)}$ .

$$F' = \sum_{M \in \mathcal{U}} \frac{GMma}{rc^2} = \frac{Gma\rho_{\text{gal}}}{c^2} \int_{\mathcal{U}_{\text{obs.}}} \frac{d\tau}{r} = \frac{4\pi Gma\rho_{\text{gal}}}{c^2} \int_0^{c/H} \frac{r^2 dr}{r}.$$

Au-delà de l'horizon  $c/H$ , l'Univers serait inobservable à cause d'une vitesse de récession supérieure à celle de la lumière. On obtient alors :

$$F' = ma \times \left\{ \frac{2\pi G\rho_{\text{gal}}}{H^2} \right\}.$$

Avec les valeurs admises pour la densité de masse dans les galaxies  $\rho_{\text{gal}} = 3 \times 10^{-28} \text{kg.m}^{-3}$  et la constante de Hubble  $H = 55 \pm 7 \text{km/s.Mpc}$ , on obtient un facteur numérique  $\{ \cdot \}$  de l'ordre de  $1/25$ , au lieu de 1. Ce désaccord n'est cependant pas dramatique car la répartition de matière en dehors des galaxies est très mal connue et dépasse vraisemblablement la quantité de matière présente dans les galaxies<sup>(6)</sup>. On peut de plus améliorer d'un facteur 2 le coefficient numérique ci-dessous en tenant compte de la correction relativiste à la masse :

$$\rho_{\text{gal}} = \rho_{\text{gal}}^0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{H^2 r^2}{c^2}}}, \quad v = Hr.$$

<sup>(4)</sup> M.V. Berry, Principles of Cosmology and Gravitation (IOP Publishing, Cambridge 1989), pp. 37-41

<sup>(5)</sup> Dans les modèles d'univers en expansion, on peut estimer le "rayon" de l'Univers par le rapport  $c/H$  où  $H$  est la constante de Hubble (1929). Les données spectroscopiques (effet Doppler) permettent de déterminer la vitesse d'éloignement (vitesse de récession radiale) des objets lointains (par exemple pour la galaxie NGC7619 qui se situe à  $d = 65 \text{ Mpc} = 65 \times 3.0856 \cdot 10^{13} \text{km}$ ,  $z = \frac{\lambda' - \lambda_0}{\lambda_0} = 0.0126$  conduit à  $v \simeq cz = 3780 \text{ km/s}$ ). En supposant que cet éloignement est uniforme (et l'a été par le passé), on obtient une estimation de l'âge de l'Univers  $d/v = 16.9 \cdot 10^9$  années et de la constante de Hubble  $H = v/d = 58 \text{ km/s.Mpc}$ .

<sup>(6)</sup> Problème de la masse manquante ou de la matière noire.

On trouve cette fois

$$F' = \frac{4\pi G m a \rho_{\text{gal}}^0}{c^2} \int_0^{c/H} r dr \left(1 - \frac{H^2}{c^2} r^2\right)^{-1/2} = ma \times \left\{ \frac{4\pi G \rho_{\text{gal}}^0}{H^2} \right\}.$$

ii) Estimation de la distance Terre-Soleil : les paramètres fondamentaux intervenant dans la distance Terre-Soleil  $R$  sont clairement les masses respectives  $M_{\odot}$  et  $M_{\oplus}$  du Soleil et de la Terre, la période de révolution  $T$  de la Terre et la constante de gravitation  $G$  qui caractérise l'interaction gravitationnelle. On écrit

$$R = f(M_{\oplus}, M_{\odot}, T, G). \quad (9)$$

Comme  $Gmm'/r$  est une énergie, on a  $[Gmm'/r] = \mathfrak{M}\mathfrak{L}^2\mathfrak{T}^{-2}$ , soit  $[G] = \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^3\mathfrak{T}^{-2}$  ou  $\lambda_G = \lambda_M^{-1}\lambda_R^3\lambda_T^{-2}$  (les paramètres  $\lambda_x$  sont arbitraires et définissent simplement le système d'unités choisi). Avec les choix  $\lambda_M = M_{\odot}^{-1}$ ,  $\lambda_T = T^{-1}$ ,  $\lambda_G = G^{-1}$  l'expression  $\lambda_R R = f(\lambda_M M_{\oplus}, \lambda_M M_{\odot}, \lambda_T T, \lambda_G G)$  donne :

$$R = (GM_{\odot}T^2)^{1/3} f(M_{\oplus}/M_{\odot}, 1, 1, 1). \quad (10)$$

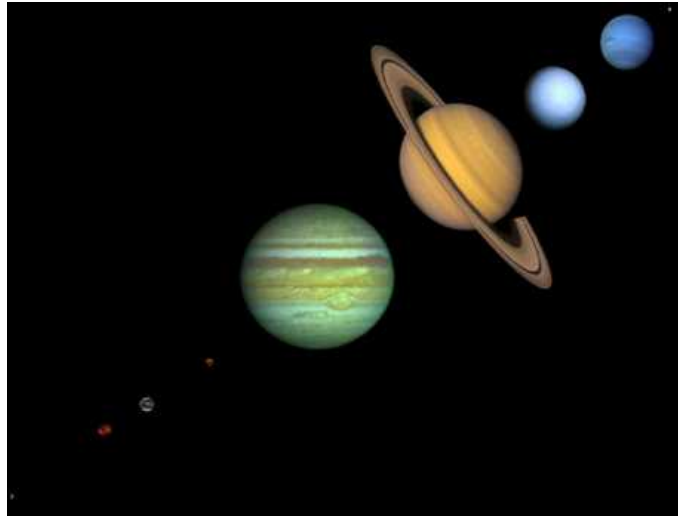
En supposant que la fonction  $f$  est d'ordre 1 et en utilisant les données pour  $G$ ,  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  et  $T = 1 \text{ an}$ , on obtient l'ordre de grandeur de la distance Terre-Soleil  $R \simeq 5 \cdot 10^{11} \text{ m}$  <sup>(7)</sup>.

Le résultat  $R = (GM_{\odot}T^2)^{1/3} f(M_{\oplus}/M_{\odot}, 1, 1, 1)$  n'est rien d'autre que la 3ème loi de Kepler habituellement écrite sous la forme  $R^3/T^2 = GM_{\odot}/4\pi^2$ . La fonction  $f(M_{\oplus}/M_{\odot}, 1, 1, 1)$  vaut donc  $(4\pi^2)^{-1/3} \simeq 0.30$  et est indépendante du rapport  $M_{\oplus}/M_{\odot}$ . L'absence de  $M_{\oplus}$  dans cette expression est le fait de l'équivalence masse inertielle-masse gravitationnelle qui permet de simplifier la masse de l'objet gravitant, ici la Terre, dans le principe fondamental de la dynamique  $M_{\oplus} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{M_{\oplus}M_{\odot}}{r^2} \mathbf{u}_r$ . Cette simplification est très importante, mais ne peut pas être déduite de l'analyse dimensionnelle.

**Tableau 0.2** Données numériques relatives aux planètes du système solaire. Les masses ( $M$ ) sont indiquées en kg, les distances (aphélie, périhélie et rayon moyen de l'orbite) en millions de km, la période de révolution ( $T$ ) en années tropiques et l'inclinaison de l'orbite ( $\alpha$ ) est repérée par rapport au plan de l'écliptique,  $e$  est l'excentricité.

Planète	$M$	$r_{\text{max}}$	$r_{\text{min}}$	$\bar{r}$	$T$	$e$	$\alpha$
Mercuré	$3.303 \cdot 10^{23}$	69.7	45.9	57.9	0.240 85	0.205 6	$7.00^\circ$
Vénus	$48.70 \cdot 10^{23}$	109	107.4	108.2	0.615 21	0.006 8	$3.39^\circ$
Terre	$59.75 \cdot 10^{23}$	152.1	147.1	149.6	1.000 04	0.016 7	—
Mars	$6.418 \cdot 10^{23}$	249.1	206.7	227.9	1.880 89	0.093 4	$1.85^\circ$
Jupiter	$189.9 \cdot 10^{25}$	815.7	740.9	778.3	11.862 23	0.048 5	$1.30^\circ$
Saturne	$56.86 \cdot 10^{25}$	1 507	1 347	1 427.0	29.455 77	0.055 6	$2.49^\circ$
Uranus	$8.66 \cdot 10^{25}$	3 004	2 735	2 869.6	84.013 9	0.047 2	$0.77^\circ$
Neptune	$10.30 \cdot 10^{25}$	4 537	4 456	4 496.6	164.793	0.008 6	$1.77^\circ$
Pluton	$\simeq 1 \cdot 10^{22}$	7 375	4 425	5 900.0	247.7	0.250	$17.2^\circ$

<sup>(7)</sup> Au lieu de  $1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$  en réalité, l'ordre de grandeur est donc très correct.



**Figure 0.3** Les planètes du système solaire.

Connaissant le rayon de l'orbite de la Terre, sa période de révolution et celle d'une autre planète, Saturne par exemple (29 ans), on peut s'affranchir du facteur numérique  $(4\pi^2)^{-1/3}$  pour obtenir le rayon de l'orbite de cette planète par une règle simple de proportionnalité :

$$R_{\oplus}^3/T_{\oplus}^2 = R_{\text{Saturne}}^3/T_{\text{Saturne}}^2, \quad \text{soit} \quad R_{\text{Saturne}} = (T_{\text{Saturne}}^2/T_{\oplus}^2)^{1/3}R_{\oplus} \simeq 1400.10^6\text{km}.$$



**Figure 0.4** Une représentation de Saturne (image du jour 30 mars 2000, tirée du site <http://www.apod.geoman.net/fr/html/archives> miroir du site de la NASA Astronomy picture of the day <http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod>).

### 2.3. L'interaction électrique

Il existe dans la nature des corps qui possèdent une propriété appelée charge électrique, notée  $q$ , et exprimée en coulombs (C). Les charges électriques peuvent être positives ou négatives. Elles créent un potentiel électrostatique  $\phi_q(r)$  appelé potentiel coulombien :

$$\phi_q(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (11)$$

Celui-ci détermine l'énergie potentielle d'une charge test  $q'$  au voisinage de  $q$  :

$$\mathcal{U}_{q \rightarrow q'}(r) = q'\phi_q(r) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (12)$$

Entre les deux charges électriques  $q$  et  $q'$  s'exerce une force dérivant de l'énergie potentielle, découverte en 1785 par Coulomb,

$$\mathbf{F}_{q \rightarrow q'}(r) = -\nabla \mathcal{U}_{q \rightarrow q'}(r) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r \quad (13)$$

attractive si  $q$  et  $q'$  sont de signes opposés et répulsive dans le cas contraire. La constante  $\epsilon_0$  est appelée permittivité du vide

$$\epsilon_0 \equiv 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}, \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv 9.10^9 \text{ F}^{-1}\text{m}. \quad (14)$$

La forme de cette constante provient du choix du système d'unités.

L'interaction électrique domine tous les phénomènes physiques de l'échelle de l'atome à celle de l'homme (physique atomique, physique du solide, chimie, biologie. . .). On caractérise son intensité par la constante de structure fine :

$$\alpha_q = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq 1/137, \quad (15)$$

où  $q_e = -1.60217733(49) \times 10^{-19} \text{ C}$  est la charge de l'électron.

**Remarques :**

i) On peut montrer par quelques ordres de grandeur que la prédominance de l'interaction gravitationnelle à l'échelle du système solaire par exemple est une conséquence de la neutralité électrique de la matière à l'échelle macroscopique. L'interaction gravitationnelle Terre-Soleil vaut

$$F_{M_\odot \rightarrow M_\oplus} = \frac{GM_\oplus M_\odot}{d^2} \simeq \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24} \times 2 \cdot 10^{30}}{(1.5 \times 10^{11})^2} \simeq 4 \cdot 10^{22} \text{ N}.$$

Supposons maintenant qu'une fraction d'un millionième des atomes de la Terre et du Soleil soient ionisés une fois. La Terre est essentiellement constituée de fer et de silicium. On peut considérer une masse molaire moyenne de l'ordre de  $56 \text{ g.mol}^{-1}$  pour estimer le nombre d'atomes de la Terre :  $\frac{6 \cdot 10^{24} \times 6.022 \cdot 10^{23}}{56 \cdot 10^{-3}} \simeq 10^{50}$  atomes correspondant à une charge de l'ordre de  $Q_\oplus \simeq 10^{31} \text{ C}$ . De même, en supposant le Soleil constitué d'hydrogène, le nombre d'atomes correspondant vaut  $10^{57}$  et la charge  $Q_\odot \simeq 10^{38} \text{ C}$ . Dans cette hypothèse, la force électrique entre Terre et Soleil vaudrait

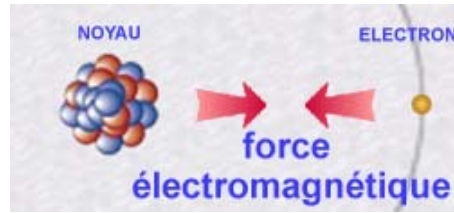
$$F_Q = \frac{Q_\oplus Q_\odot}{4\pi\epsilon_0 d^2} \simeq \frac{9 \cdot 10^9 \times 10^{31} \times 10^{38}}{(1.5 \times 10^{11})^2} \simeq 10^{57} \text{ N}.$$

Il est évident que si les effets gravitationnels se manifestent, c'est parce que la neutralité électrique efface à cette échelle les effets dus à l'interaction coulombienne.

ii) A l'échelle atomique, l'interaction électrique est l'interaction dominante. On peut estimer simplement par exemple l'énergie de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène. On utilise pour cela un résultat très important de la mécanique quantique. Si une particule est confinée dans une région d'extension spatiale  $r$ , alors sa quantité de mouvement est de l'ordre de  $p \sim \hbar/r^{(8)}$ . Dans un atome d'hydrogène, l'électron est confiné autour du proton à une distance mesurée par  $r$ . Son énergie cinétique est de l'ordre

<sup>(8)</sup> Ce résultat est dû à Heisenberg. Il prend en toute rigueur une forme plus précise qui stipule que, dans l'état fondamental d'un système, les fluctuations de quantité de mouvement  $\Delta p$  sont liées aux fluctuations de position  $\Delta r$  par  $\Delta p \cdot \Delta r \sim \hbar$ . On a simplement supposé ici qu'une mesure de la quantité de mouvement est donnée par ses fluctuations.





**Figure 0.6** Interaction électromagnétique à l'échelle de l'atome.

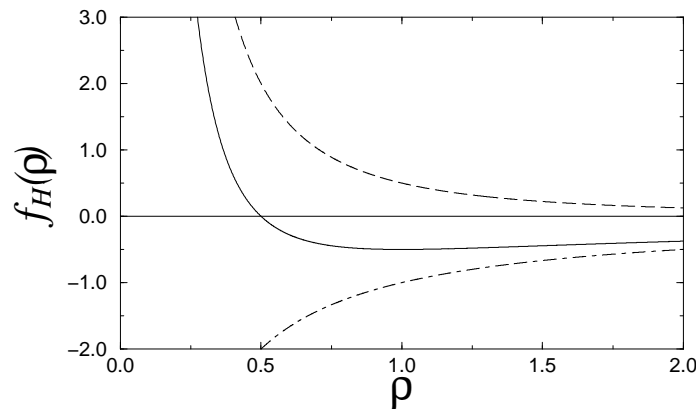
de  $T = p^2/2m \simeq \hbar^2/2mr^2$ . L'énergie potentielle électron-noyau est attractive et vaut  $\mathcal{U}_{p \rightarrow e^-}(r) = -q_e^2/4\pi\epsilon_0 r$ . L'énergie totale  $E_H(r) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  est répulsive à courte distance (terme cinétique) et attractive à grande distance (terme coulombien). Elle est minimale à la distance

$$r = a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e q_e^2} = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.529 \text{ \AA}$$

appelée rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène qui donne la taille caractéristique d'un atome. L'énergie caractéristique est obtenue par

$$E_H(a_0) = -\frac{m_e q_e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = -13.6 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} = -13.6 \text{ eV}.$$

L'allure de l'énergie  $E_H(r/a_0) = \alpha_q^2 m_e c^2 f_H(r/a_0)$  est indiquée sur la figure ci-dessous, les courbes en pointillés donnant les termes des énergies cinétique (répulsive) et potentielle (attractive).



**Figure 0.5** Allure de l'énergie totale en fonction de la distance électron-proton dans l'atome d'hydrogène.

iii) La constante de structure donne une idée de l'ordre de grandeur de l'énergie de l'état fondamental de l'atome le plus simple. L'expression obtenue en ii) peut s'écrire

$$E_H(a_0) = -\frac{1}{2} \alpha_q^2 m_e c^2.$$

iv) Dimension et énergie caractéristiques de l'atome d'hydrogène : on se propose de retrouver le résultat précédent par analyse dimensionnelle. L'atome d'hydrogène est

caractérisé par les masses  $m_e$  et  $m_p$  de l'électron et du proton, leurs charges  $-q$  et  $q$ , la constante  $\varepsilon_0$  caractéristique de l'interaction électrique (les effets gravitationnels sont négligeables) et la constante de Planck  $\hbar$ , puisque le traitement doit être quantique en raison de la petite taille de l'atome.

Comme l'énergie est caractérisée par le terme d'interaction  $-q^2/4\pi\varepsilon_0 a$ , on posera que la taille caractéristique de l'atome,  $a$ , est de la forme

$$\begin{aligned} a &= f(q^2, 4\pi\varepsilon_0, m_e, m_p, \hbar), \text{ soit} \\ \lambda_a a &= f(\lambda_{q^2} q^2, \lambda_{4\pi\varepsilon_0} 4\pi\varepsilon_0, \lambda_m m_e, \lambda_m m_p, \lambda_{\hbar} \hbar), \end{aligned} \quad (16)$$

où  $\lambda_{\hbar} = \lambda_m \lambda_a^2 \lambda_t^{-1}$ .

Comme  $[q^2/4\pi\varepsilon_0 r] = \mathfrak{ML}^2\mathfrak{T}^{-2}$ , on a  $\lambda_{q^2} \lambda_{4\pi\varepsilon_0}^{-1} \lambda_a^{-1} = \lambda_m \lambda_a^2 \lambda_t^{-2}$ , soit  $\lambda_{4\pi\varepsilon_0} = \lambda_{q^2} \lambda_a^{-3} \lambda_m^{-1} \lambda_t^2$ . Combiné à  $\lambda_{\hbar}$ , cette expression permet d'éliminer  $\lambda_t$  et il vient  $\lambda_a = \lambda_{4\pi\varepsilon_0} \lambda_{\hbar}^2 \lambda_{q^2}^{-1} \lambda_m^{-1}$ , soit, avec les choix  $\lambda_{4\pi\varepsilon_0} = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$ ,  $\lambda_{\hbar} = \hbar^{-1}$ ,  $\lambda_{q^2} = q^{-2}$  et  $\lambda_m = m_e^{-1}$  :

$$a = 4\pi\varepsilon_0 \hbar^2 q^{2-1} m_e^{-1} \times f(1, 1, 1, m_p/m_e, 1)$$

ce qui conduit, dans l'hypothèse où la fonction est d'ordre 1<sup>(9)</sup> à l'expression du rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène

$$a = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e q^2} = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}. \quad (17)$$

On obtiendra de manière similaire l'énergie caractéristique par l'expression  $-q^2/4\pi\varepsilon_0 a$  qui conduit à<sup>(10)</sup>

$$E = -\frac{m_e q^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} = -27.2 \times 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (18)$$

En reprenant rigoureusement le même raisonnement, on peut calculer la taille caractéristique du système proton-électron en le supposant lié par les forces gravitationnelles uniquement. On trouve alors

$$a = \frac{\hbar^2}{G m_p m_e^2} \simeq 10^{29} \text{ m}, \quad (19)$$

c'est-à-dire un nombre sans aucune mesure avec la réalité et même supérieur à la taille de l'univers ! Il est donc clair que la structure de l'atome est très bien décrite au moyen de la mécanique quantique ( $\hbar$ ) et de l'interaction électrique ( $\varepsilon_0$ ). L'absence de  $c$  et de  $G$  montre que gravitation et relativité ne jouent aucun rôle ou en tout cas un rôle négligeable en première approximation.

vi) Il existe deux types de charges électriques appelées conventionnellement positives et négatives. Leur répartition à l'échelle macroscopique est équilibrée, c'est la neutralité électrique de la matière. A l'échelle microscopique, il peut se produire des processus conduisant à des échanges de charge, mais la charge totale du système fermé est conservée. C'est le cas dans l'exemple de la désintégration du neutron.

La charge électrique est par ailleurs une quantité scalaire invariante relativiste : des observateurs liés à des référentiels galiléens en mouvement l'un par rapport à l'autre

<sup>(9)</sup> Un calcul exact montre que  $f(1, 1, 1, m_p/m_e, 1) = 1 + m_e/m_p \simeq 1$ .

<sup>(10)</sup> La valeur exacte est la moitié de cette valeur,  $E_0 = -13.6 \text{ eV}$ , où  $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ .

mesurent des charges identiques. Cette propriété n'est pas partagée par la masse par exemple.

La charge électrique enfin est quantifiée. Dans la nature, toutes les particules observables à l'état libre possèdent une charge multiple de celle de l'électron, considérée comme la charge élémentaire. Certaines particules cependant présentent une structure interne (les hadrons). Ils sont constitués de quarks, dont la charge électrique est fractionnaire, et qui ne sont pas observables à l'état libre. Par exemple le proton et le neutron sont formés de trois quarks :  $p = uud$  et  $n = udd$  où  $q_u = +\frac{2}{3} |q_e|$  et  $q_d = -\frac{1}{3} |q_e|$ .

**Tableau 0.3** Quelques charges électriques "élémentaires", mesurées en unité de charge électronique.

électron	$e^-$	$q_e = -  q_e $
proton	$p$	$q_p =  q_e $
neutron	$n$	$q_n = 0$
photon	$\gamma$	$q_\gamma = 0$
mésons pi	$\pi^\pm, \pi^0$	$q_{\pi^\pm} = \pm  q_e , q_{\pi^0} = 0$

vi) Densité de courant et conservation locale : considérons un milieu comportant une densité volumique de charges  $\rho$ , associée à des charges  $q$  portées par des particules de densité  $n$ ,  $\rho = nq$ . Sous l'effet d'un champ électrique créé par une différence de potentiel, les charges acquièrent une vitesse de dérive  $\mathbf{v}$  telle que  $\mathbf{v} = \mu \mathbf{E}$  où  $\mu$  est appelée mobilité (la vitesse des électrons est en fait considérablement plus élevée, mais les chocs sur les imperfections de réseau ou les ions (temps moyen entre deux chocs  $\tau \simeq 10^{-12}$  s) produisent un ralentissement et la vitesse effective dans la direction du champ est donnée par la vitesse de dérive).

La charge  $dQ$  qui passera à travers une surface élémentaire  $dS$  pendant le temps  $dt$  correspond au nombre de particules susceptibles d'atteindre cette surface pendant cette durée, soit

$$dQ = nq \times v dt dS \times \cos \theta,$$

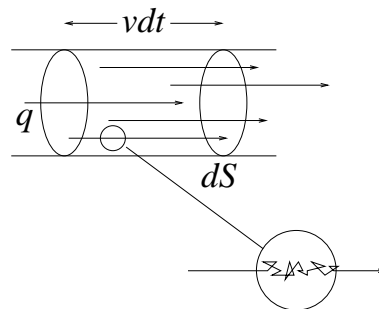
où  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{v}$  et  $d\mathbf{S}$ . On pose

$$nq\mathbf{v} \equiv \mathbf{j} \quad (20)$$

de sorte que

$$dQ = j dS \cos \theta dt = \mathbf{j} d\mathbf{S} dt. \quad (21)$$

Le vecteur  $\mathbf{j}$  est la densité de courant électrique. L'intensité traversant  $dS$  peut s'écrire  $dI = \frac{\partial Q}{\partial t} = \mathbf{j} d\mathbf{S}$ .



**Figure 0.7** Dérive des porteurs de charge dans un conducteur sous l'effet d'un champ électrique et représentation schématique du mouvement réel.

Cette relation permet d'écrire la conservation de la charge électrique. Considérons un volume  $\Omega$  dans lequel la charge varie d'une quantité  $\Delta Q$  pendant le temps  $dt$ . Cette variation est due à une variation de  $d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$  de la densité volumique, dans le volume considéré

$$\Delta Q = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau.$$

Elle s'accompagne donc nécessairement d'un courant de particules évalué comme le flux entrant à travers les surfaces de  $\Omega$ , soit<sup>(11)</sup>

$$\Delta Q = \int_{\Sigma(\Omega)} \mathbf{j}(-d\mathbf{S}) dt.$$

Cette dernière expression peut être modifiée à l'aide du théorème de la divergence et il vient finalement la relation de continuité

$$\text{div } \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (22)$$

On peut également noter que l'intensité du courant électrique à travers une surface  $S$  est définie par  $I = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S}$ .

vii) Hauteur maximale des montagnes : aux échelles de longueur intermédiaires, les phénomènes physiques sont gouvernés par la compétition entre deux interactions. Comme exemple on peut considérer la hauteur maximale  $h$  d'une montagne sur une planète où le champ de pesanteur vaut  $g$ . Cette hauteur maximale est atteinte lorsque la pression exercée par le poids de la montagne est suffisante pour provoquer la fusion de sa base. La cohésion des solides est gouvernée pour sa part par l'énergie électrostatique et on peut en estimer l'ordre de grandeur à 1% de l'énergie d'ionisation des atomes, calculée précédemment<sup>(12)</sup>. On peut donc noter la densité d'énergie nécessaire à la fusion d'un solide  $u_{sol-liq} = \eta E_0/a^3$  où  $a \simeq 3.10^{-10}\text{m}$  est l'ordre de grandeur de la distance entre atomes dans un solide,  $E_0 \simeq 10\text{ eV}$  et  $\eta \simeq 0.01$ .

Les paramètres pertinents pour l'estimation de  $h$  sont donc le champ de pesanteur  $g$ , la densité  $\rho \simeq 5.10^3\text{kg.m}^{-3}$  du matériau et  $u_{sol-liq} : h = f(u, g, \rho)$ . On montre facilement que  $\lambda_h = \lambda_u \lambda_g^{-1} \lambda_\rho^{-1}$ , soit  $h = u \rho^{-1} g^{-1} f(1, 1, 1)$  et finalement pour la Terre

$$h \simeq \eta E_0 / \rho g a^3 \simeq 11.10^3\text{m} \quad (23)$$

ce qui constitue un ordre de grandeur très correct. L'Everest culmine en effet à près de 9000 m et les volcans des îles Hawaï ont une hauteur de 5000 m au dessus du niveau de la mer et reposent sur la plaque océanique pacifique à 4000 ou 5000 m au-dessous du niveau de la mer. On comprend également que sur Mars (moins massive que la Terre et donc avec une accélération de la pesanteur moindre) il existe des falaises de 20 km de hauteur.

<sup>(11)</sup> On évalue le courant entrant dans  $\Omega$  alors que  $d\mathbf{S}$  est orienté suivant la normale extérieure, d'où le signe négatif pour le calcul du flux.

<sup>(12)</sup> Pour fondre un solide, il faut apporter une énergie qui ne peut être qu'une fraction de l'énergie d'ionisation qui correspond à la dissociation de l'atome. On peut noter que la valeur choisie  $\eta E_0 \sim 0.1\text{ eV}$  correspond à une température de 1000 K, ce qui est tout à fait raisonnable pour une température de fusion. La correspondance énergie  $\leftrightarrow$  température provient de la physique statistique par le biais de la constante de Boltzmann  $k_B$  qui mesure l'énergie cinétique moyenne à température donnée  $E \simeq k_B T$  ( $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\text{J.K}^{-1}$ ).



**Figure 0.8** Photos d'un canyon (20 juillet 1995) et d'une montagne sur Mars (19 juillet 1995), images du jour (<http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod>).

Ces raisonnements donnent l'ordre de grandeur de la hauteur des montagnes pour des astres ayant une activité tectonique. Ce n'est pas le cas de la Lune par exemple qui posséderait autrement des montagnes très élevées.

## 2.4. L'interaction forte

Pour la description des phénomènes subatomiques (physique nucléaire et physique des particules), Heisenberg et Yukawa ont initié vers 1930 la théorie de l'interaction forte. On postule pour cela l'existence d'une quantité fondamentale appelée charge forte (ou charge hadronique), notée  $g$ , qui crée un potentiel phénoménologique appelé potentiel de Yukawa :

$$\phi_g(r) = -\frac{ge^{-r/\lambda}}{r}. \quad (24)$$

où  $\lambda = \hbar/m_\pi c \simeq 1.3 \times 10^{-15} \text{ m}^{(13)}$  mesure la portée de l'interaction forte, avec  $m_\pi \simeq 2.48 \times 10^{-28} \text{ kg}$  la masse des particules appelées mésons  $\pi$ . Un second nucléon de charge forte  $g'$ , placé à proximité du premier, possède une énergie potentielle

$$\mathcal{U}_{g \rightarrow g'}(r) = g' \phi_g(r) = -\frac{gg'e^{-r/\lambda}}{r} \quad (25)$$

dont dérive une force ayant approximativement à courte distance la forme

$$\mathbf{F}_{g \rightarrow g'}(r) = -\nabla \mathcal{U}_{g \rightarrow g'}(r) \simeq -\frac{gg'e^{-r/\lambda}}{r} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{r} \right) \mathbf{u}_r. \quad (26)$$

La constante de structure de l'interaction forte est assez mal connue. Elle est de l'ordre de<sup>(14)</sup>

$$\alpha_g = \frac{g^2}{\hbar c} \simeq 0.3 \quad (27)$$

d'où la valeur approximative de  $g$  pour les nucléons,  $g \simeq 9.5 \times 10^{-14} \text{ U.S.I.}$

### Remarques :

i) La cohésion nucléaire est assurée par l'interaction forte. Calculons la force entre deux nucléons dans le noyau :  $F_g(10^{-15} \text{ m}) \simeq \frac{g^2 e^{-r/\lambda}}{r^2} \simeq \frac{9 \cdot 10^{-27} \times e^{-1/1.3}}{10^{-30}} \simeq 4 \cdot 10^3 \text{ N}$ . A cette même distance, l'interaction coulombienne est de l'ordre de  $F_q(10^{-15} \text{ m}) = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \simeq$

<sup>(13)</sup> On peut vérifier que  $[\lambda] = \mathfrak{M} \mathfrak{L}^2 \mathfrak{T}^{-2} \mathfrak{I} \mathfrak{M}^{-1} \mathfrak{L}^{-1} \mathfrak{T} = \mathfrak{L}$ .

<sup>(14)</sup> La valeur de  $\alpha_g$  a d'abord été estimée à 15 environ, puis revue à la baisse après les théories plus récentes de l'interaction de couleur entre quarks.

$\frac{10^{-38} \times 10^{10}}{10^{-30}} \simeq 10^2$  N. Il y a plus d'un ordre de grandeur entre les deux phénomènes à cette échelle, ce qui signifie que les effets électrostatiques de répulsion entre protons n'apportent que des corrections faibles devant les phénomènes dominants.

ii) L'interaction forte ne perturbe pas les phénomènes atomiques. On peut s'en convaincre en évaluant cette interaction à diverses distances, comparées à la distance électron-noyau, de l'ordre de  $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ .  $F_g(10 \cdot 10^{-15} \text{ m}) \simeq 2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ ,  $F_g(50 \cdot 10^{-15} \text{ m}) \simeq 10^{-22} \text{ N}$  !

iii) On peut évaluer l'énergie de l'état fondamental d'un noyau comme on l'a fait pour l'atome d'hydrogène. Considérons le cas du noyau composé le plus simple, le deutérium constitué d'un proton et d'un neutron. Un noyau de taille caractéristique  $R$  dans lequel sont confinés les nucléons a pour énergie totale  $E_D(R) \sim \frac{\hbar^2}{2m_p R^2} - \frac{g^2 e^{-R/\lambda}}{R}$ . On minimise l'énergie pour obtenir la distance caractéristique  $a_N$  des phénomènes nucléaires :

$$\left( \frac{\partial E_D(R)}{\partial R} \right)_{r_N} = 0, \quad \frac{\hbar^2}{m_p r_N} = g^2 e^{-r_N/\lambda} \left( \frac{r_N}{\lambda} + 1 \right).$$

C'est une équation qui n'admet pas de solution analytique, mais dont on peut obtenir une solution graphique. En notant  $a_N$  l'échelle de longueur caractéristique  $a_N = \frac{\hbar^2}{m_p g^2} = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \times \frac{e^2}{g^2} \times \frac{m_e}{m_p} = a_0 \times \frac{\alpha_g}{\alpha_Q} \times \frac{m_e}{m_p} \simeq 0.64 \times 10^{-15} \text{ m} = \lambda/2$ , on peut poser  $r = \rho \lambda = 2\rho a_N$  et écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{e^\rho}{\rho + 1} = 2\rho.$$

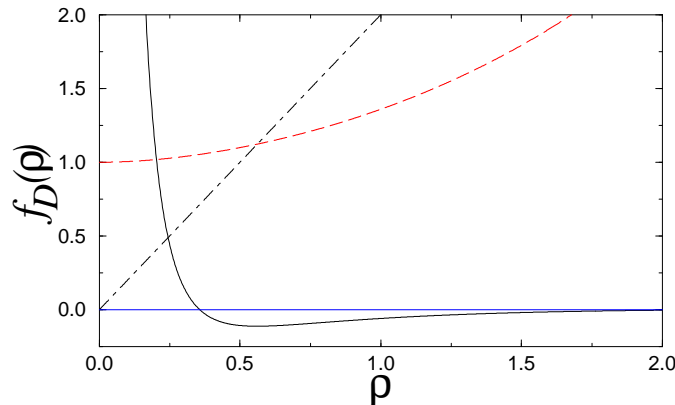
En traçant chaque membre de l'égalité en fonction de  $\rho$ , l'intersection donne  $\rho_N \simeq 0.56$ , soit  $r_N \simeq 0.73 \text{ fm}$  pour la taille caractéristique du noyau de deutérium. L'énergie minimale vaut alors

$$E_D(r_N) = \frac{m_p g^4}{\hbar^2} \left( \frac{1}{8\rho_N^2} - \frac{e^{-\rho_N}}{2\rho_N} \right) = \alpha_g^2 m_p c^2 f_D(\rho_N),$$

où  $\alpha_g^2 m_p c^2 = \alpha_Q^2 m_e c^2 \times \left( \frac{\alpha_g}{\alpha_Q} \right)^2 \times \frac{m_p}{m_e} \simeq 92 \cdot 10^6 \text{ eV}$ . Le minimum de  $f_D(\rho)$  vaut  $-0.12$  et conduit à l'état fondamental

$$E_D(r_N) \simeq -11 \text{ MeV}.$$

Il s'agit d'une énergie considérable par rapport aux énergies mises en jeu dans la cohésion électrostatique des atomes. L'allure de l'énergie totale est représentée sur la figure ci-dessous. Les courbes en pointillés montrent la solution pour  $\rho_N$ .



**Figure 0.9** Energie totale du deutérium.

iv) Effet électrostatique dans les noyaux isobares. Les effets électrostatiques sont cependant mesurables également à l'échelle du noyau. Considérons des noyaux isobares, c'est-à-dire qui comportent un même nombre de nucléons, mais des répartitions différentes entre protons et neutrons. C'est le cas de  $^{11}_5\text{B}$  et  $^{11}_6\text{C}$ , le carbone 11 ayant un proton supplémentaire. On constate expérimentalement que les niveaux d'énergie de ces deux noyaux sont très voisins, mais que le spectre du carbone 11 est décalé de +1.982 MeV par rapport à celui du bore 11. C'est un effet faible, mais mesurable. Pour interpréter cette différence d'énergie, on tient compte de la différence d'énergie de masse entre proton et neutron et de la différence d'énergie électrostatique entre un noyau à 6 protons et un noyau à 5 protons :

$$E_0(^{11}_6\text{C}) - E_0(^{11}_5\text{B}) = m_p c^2 - m_n c^2 + U_{\text{es}} = 1.982 \text{ MeV},$$

où  $m_n c^2 - m_p c^2 = 1.3 \text{ MeV}$  ( $m_p c^2 = 938.25 \text{ MeV}$  et  $m_n c^2 = 939.55 \text{ MeV}$ ), et  $U_{\text{es}} = U(Z = 6) - U(Z = 5)$ . L'énergie électrostatique d'un système à  $Z$  protons est de la forme

$$U(Z) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \simeq \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 R} N_\ell,$$

où  $R$  est la taille moyenne du noyau,  $R = r_0 A^{1/3}$ ,  $A$  étant le nombre de nucléons et  $r_0 = 1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$ ,  $N_\ell = \frac{1}{2} Z(Z - 1)$  est le nombre de paires distinctes parmi les  $Z$  protons. On en déduit que

$$U(Z) \simeq \frac{Z(Z - 1)q_e^2}{2 \times 4\pi\epsilon_0 R},$$

soit  $U_{\text{es}} \simeq \frac{q_e^2}{2 \times 4\pi\epsilon_0 R} \times 10 = 10 \times \frac{q_e^2}{2 \times 4\pi\epsilon_0 a_0} \frac{a_0}{R}$ . L'application numérique donne  $U_{\text{es}} \simeq 10 \times 13.6 \times \frac{0.5}{2.2 \times 1.2} 10^5 \text{ eV} \simeq 2.5 \text{ MeV}$  (un calcul précis donne 2.69 MeV) à comparer aux données expérimentales  $U_{\text{es}} = E_0(^{11}_6\text{C}) - E_0(^{11}_5\text{B}) + (m_n - m_p)c^2 \simeq 3.282 \text{ MeV}$ . Compte-tenu de la simplicité du modèle, l'accord est très satisfaisant.

## 2.5. L'interaction faible

L'interaction faible est plus subtile. Elle joue sur une portée plus courte encore que l'interaction forte et ne produit pas d'états liés entre particules (elle n'est pas responsable de phénomènes de cohésion), mais intervient dans la radioactivité  $\beta$ , par exemple dans la désintégration du neutron<sup>(15)</sup> :

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Elle a été élaborée vers 1934 par Fermi. On la caractérise par une constante de structure de Fermi :

$$\alpha_F = \frac{g_F^2}{\hbar c} \simeq 10^{-5}, \quad (28)$$

<sup>(15)</sup> C'est Pauli qui a émis l'hypothèse de l'existence d'une particule neutre, de masse très faible, pour interpréter le caractère continu des spectres d'émission  $\beta$ , très différents des spectres discrets observés dans les désintégrations  $\alpha$ . L'existence de spectre continu ne pouvant s'expliquer dans le contexte d'un problème à deux corps avec conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, il fallait supposer qu'un troisième corps permettait une redistribution de l'énergie de manière continue entre les deux particules observables.

mais on ne peut pas écrire de potentiel ou de force pour cette interaction.

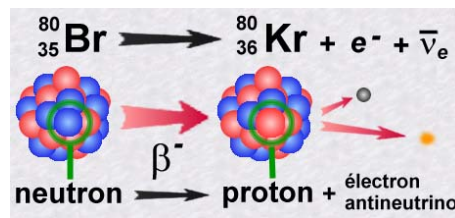


Figure 0.10 Désintégration  $\beta^-$  du  ${}^{80}_{35}\text{Br}$ .

## 2.6. Unification des interactions

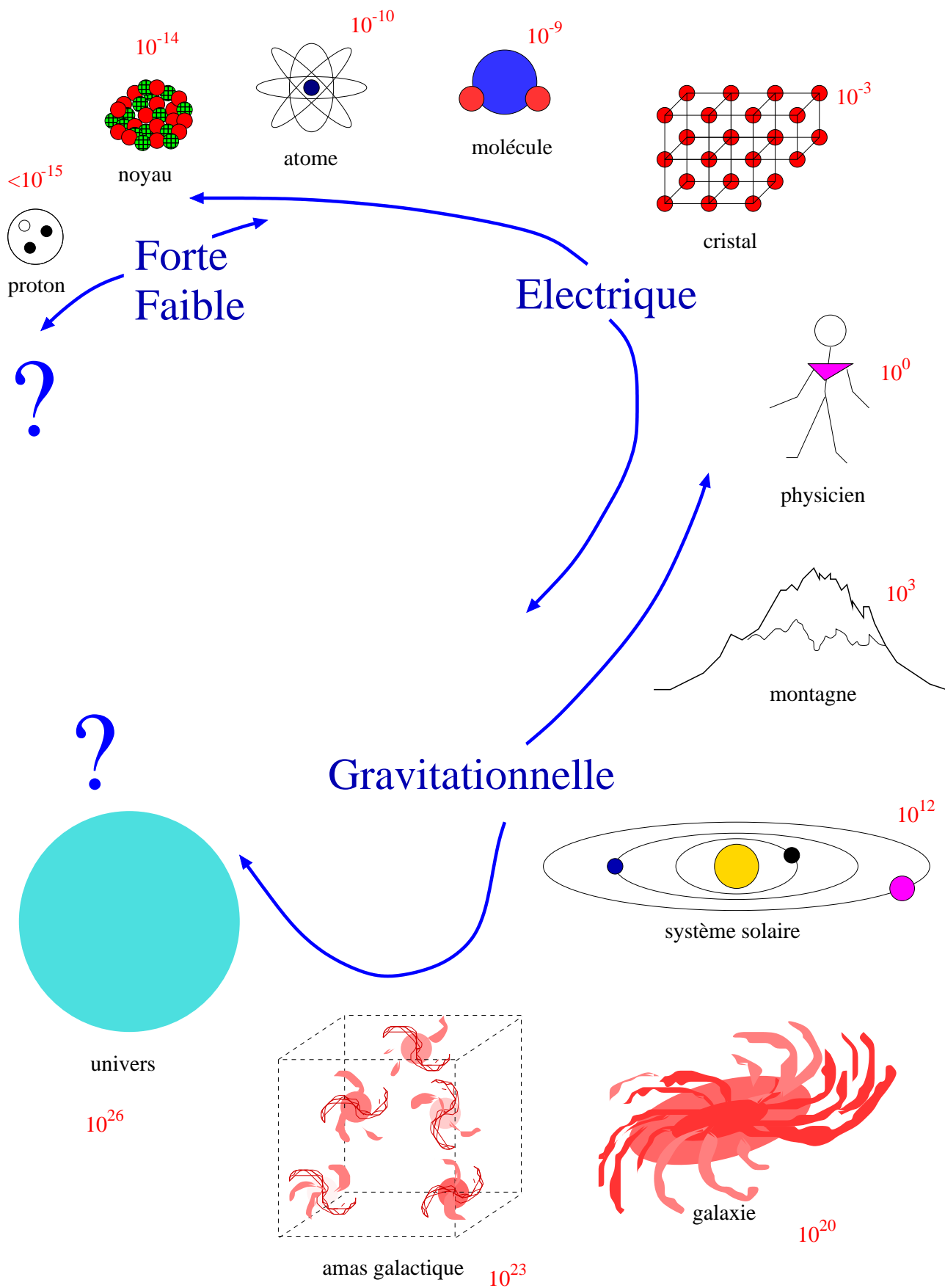
L'unification des diverses interactions constitue l'enjeu actuel de la physique des particules élémentaires. Les interactions électromagnétique et faible sont d'ores et déjà unifiées (Weinberg, Glashow et Salam, 1979), l'interaction forte est partiellement dans un contexte unifié, mais la plus ancienne, la gravitation, résiste encore à ces tentatives. Le tableau suivant donne quelques repères historiques.

Tableau 0.4 Les quatre interactions fondamentales.

	Interactions			
	gravitationnelle	électrique	forte	faible
<b>Repères</b>	Newton 1687	Coulomb 1785 Oersted 1820 Maxwell 1864	Yukawa 1930 Heisenberg 1932	Fermi 1934
<b>Source</b>	masse	charge électrique	charge forte	charge faible
$g$	$m$	$q$	$g$	$g_F$
<b>Potentiel <math>V_g(r)</math></b>	$-G \frac{m}{r}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$	$-\frac{g}{r} e^{-r/\lambda}$	
<b>Énergie potentielle (sources ponctuelles)</b>	$-G \frac{mm'}{r}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$	$-\frac{gg'}{r} e^{-r/\lambda}$	
<b>Constante (U.S.I.) <sup>(a)</sup></b>	$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$	$g = 9.5 \cdot 10^{-14}$	$g_F = 5.5 \cdot 10^{-16}$
<b>Échelle de longueur (m)</b>	$> 10^0$	$10^{-10} - 10^0$	$10^{-15} - 10^{-14}$	$< 10^{-15}$

<sup>(a)</sup> Ces constantes n'ont pas toutes la même signification. Pour comparer les interactions, il faut utiliser les constantes de structure données précédemment.





**Figure 0.11** Schéma des échelles de longueurs (en mètres) et des interactions fondamentales mises en jeu à ces échelles.

### 3. Évolution des théories dynamiques

Les échelles de longueur gouvernent également les théories dynamiques. Historiquement, la mécanique classique est la première théorie dynamique. Elle a connu de très grands succès, appliquée notamment au système solaire et à l'astronomie en général. Aux très grandes échelles de longueur, elle peut être appliquée à l'univers et contient en ce sens la cosmologie (newtonienne) qui a pour but d'établir des modèles d'évolution de l'univers.

Aux très petites échelles de longueur en revanche, elle est incapable de décrire le comportement et la structure des atomes et des molécules par exemple. Au XX<sup>ème</sup> siècle, l'émergence de la MÉCANIQUE QUANTIQUE (Bohr 1913, de Broglie 1923, Schrödinger 1925, Born, Heisenberg, Pauli 1925, ...) a surmonté cette difficulté. La mécanique quantique est une théorie dynamique au sens où elle repose sur une équation d'évolution appelée équation de Schrödinger.

A ces très petites échelles de longueur, les particules exhibent dans certaines circonstances un comportement ondulatoire (la notion classique de trajectoire perd alors son sens car il n'est plus possible de suivre individuellement une particule) qui peut donner lieu à des phénomènes d'interférences comme avec les ondes. Cela a pour effet de modifier radicalement les lois de la physique qui, si elles sont valables à l'échelle macroscopique, doivent être corrigées à l'échelle des systèmes mésoscopiques ou nanométriques<sup>(16)</sup>. Ces relations nouvelles font le plus souvent apparaître une quantification des grandeurs physiques (quantification des niveaux d'énergie de l'atome, quantification de la résistance d'éléments de circuits à l'échelle de quelques nanomètres, ...). Plus généralement, on parle de PHYSIQUE QUANTIQUE lorsque l'on inclut à ce cadre dynamique les processus d'interaction, par exemple électromagnétique. La mécanique quantique est caractérisée par la constante de Planck,  $\hbar = 1.05457266(63) \times 10^{-34}$  J.s, et redonne la mécanique classique à la limite  $\hbar \rightarrow 0$ . Elle est plus générale que la mécanique classique qu'elle inclut.

De même aux très grandes vitesses, la mécanique classique (ou quantique) est incapable de rendre compte des phénomènes physiques. Un nouveau cadre conceptuel a été élaboré par Einstein (1905). Il s'agit de la RELATIVITÉ RESTREINTE qui amène une nouvelle conception de l'espace et du temps (formulée notamment par Minkowski) et modifie complètement la dynamique. La relativité repose sur la constante  $c \equiv 2.99792458 \times 10^8$  m.s<sup>-1</sup> et redonne la physique classique à la limite  $c \rightarrow \infty$ . Elle contient donc la physique classique, mais reste indépendante de la physique quantique.

Une généralisation, construite en 1915 par Einstein, combine les prescriptions de la relativité à celles de la gravitation. Il s'agit de la RELATIVITÉ GÉNÉRALE qui inclut la relativité restreinte et qui est indispensable pour aborder les problèmes liés aux champs de gravitation intenses. Cette théorie est en particulier célèbre par la solution de Schwarzschild conduisant à l'existence de trous noirs aux masses très élevées.

Une théorie décrivant à la fois les phénomènes aux petites échelles de longueur et aux grandes vitesses est fournie par la PHYSIQUE QUANTIQUE RELATIVISTE (Dirac 1928) et constitue sous ses formes les plus élaborées (THÉORIES QUANTIQUES RELATIVISTES DES CHAMPS élaborées notamment par Feynman, Schwinger, Tomonaga et Dyson) le cadre théorique le plus achevé à l'heure actuelle, malgré son incapacité à décrire correctement les phénomènes liés à la gravitation.

Pour aborder convenablement un phénomène physique donné, on peut raisonner à partir des échelles caractéristiques<sup>(17)</sup>. Ainsi, pour une description correcte de l'atome ( $10^{-10}$  m), il est indispensable de disposer de l'électromagnétisme et de la mécanique quantique. Si des effets liés à des vitesses élevées interviennent, il faut dépasser la mécanique quantique et travailler en mécanique quantique relativiste. Pour étudier le système solaire ( $10^{12}$  m), la gravitation et la mécanique classique suffisent, alors que

<sup>(16)</sup> On parle de systèmes nanoscopiques lorsque l'on est à l'échelle du nanomètre ( $10^{-9}$  m) et de systèmes mésoscopiques à des échelles intermédiaires, par exemple le micromètre ( $10^{-6}$  m).

<sup>(17)</sup> Figure inspirée de C. Gruber, Mécanique Générale, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne 1988.

pour travailler sur les trous noirs, gravitation et relativité sont indispensables et la relativité générale s'impose.

Une fois déterminées les théories nécessaires, on identifie les paramètres pertinents, indispensables à la description des phénomènes physiques considérés et des arguments dimensionnels (on parle souvent d'arguments d'échelle) permettent de quantifier quelques ordres de grandeur.

**Tableau 0.5** Ordres de grandeur caractéristiques rencontrés en physique pour des phénomènes à des échelles très diverses.

Systèmes	dimensions	masses	nombres d'atomes	densités
Univers	$10^{26}$ m <sup>(a)</sup>	$10^{49} - 10^{50}$ kg	$10^{77}$	$10^{-29} - 10^{-28}$ kg.m <sup>-3</sup>
Galaxie	$10^{21}$ m	$10^{41} - 10^{42}$ kg	$10^{68}$	$10^{-25}$ kg.m <sup>-3</sup>
Soleil	$7.10^8$ m	$2.10^{30}$ kg	$1.2 \cdot 10^{57}$	$1.4 \cdot 10^3$ kg.m <sup>-3</sup>
Terre	$6.10^6$ m	$6.10^{24}$ kg	$3.6 \cdot 10^{51}$	$5.5 \cdot 10^3$ kg.m <sup>-3</sup>
Homme	$10^0$ m	$10^2$ kg	$6.10^{28}$	$10^3$ kg.m <sup>-3</sup>
Protéine	$10^{-7}$ m	$10^{-22} - 10^{-21}$ kg	$10^3 - 10^4$	
Molécule simple	$10^{-8}$ m	$10^{-23}$ kg	$10^2$	
Atome lourd	$10^{-10}$ m	$10^{-25}$ kg		$10^5$ kg.m <sup>-3</sup>
Atome <i>H</i>	$10^{-10}$ m	$10^{-27}$ kg		$10^2$ kg.m <sup>-3</sup>
Noyau lourd	$10^{-14}$ m	$10^{-25}$ kg		$10^{17}$ kg.m <sup>-3</sup>
Proton	$10^{-15}$ m	$10^{-27}$ kg		$10^{18}$ kg.m <sup>-3</sup>
Electron	$< 10^{-19}$ m	$10^{-30}$ kg		
Quark	$< 10^{-19}$ m	$10^{-29}$ kg		

<sup>(a)</sup> 1 u.a. (unité astronomique) =  $1.5 \cdot 10^{11}$  m, 1 a.l. (année-lumière) =  $9.46 \cdot 10^{15}$  m, 1 parsec = 3.26 a.l.

## 4. Systèmes à grand nombre de degrés de liberté

Lorsqu'un système est constitué d'un très grand nombre de constituants élémentaires, susceptibles d'interagir (1 mole de gaz par exemple contient  $6.10^{23}$  atomes), il devient illusoire de prétendre à une description détaillée de l'évolution des degrés de liberté individuels de chaque constituant. On a alors recours à des approches globales fournissant des informations sur les grandeurs moyennes (pression, température par exemple). La THERMODYNAMIQUE ou, dans une version plus élaborée, la PHYSIQUE STATISTIQUE, est le cadre conceptuel permettant cette approche globale. Ce sont des théories qui possèdent leurs outils spécifiques, mais qui reposent bien entendu sur les théories dynamiques évoquées précédemment. On calculera par exemple l'énergie moyenne d'un système en sommant toutes les valeurs possibles que peut prendre l'énergie du système, chaque valeur étant pondérée par la probabilité de la rencontrer. Les valeurs prises par l'énergie se déduisent des théories précédentes, alors que la physique statistique donne la façon de déterminer les probabilités. Si le système considéré est par exemple un gaz ionisé relativiste, il faudra bien sûr utiliser les lois de l'électromagnétisme et de la relativité pour exprimer les valeurs possibles pour l'énergie du système.

# Chapitre 1

## Electromagnétisme dans le vide

On présente deux formulations équivalentes de l'électromagnétisme, l'une traditionnelle, basée sur les équations de Maxwell, l'autre moins commune, fondée sur un principe variationnel.

### 1. Equations de Maxwell dans le vide

Dans le vide (c'est-à-dire dans une région de l'espace vide, mais en présence de charges et de courants), les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \mathbf{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \left( \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

En régime permanent, c'est-à-dire indépendant du temps, les deux premières équations deviennent  $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , soit  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ , et  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  qui conduit au théorème de Gauss. C'est le régime de l'électrostatique.

Le régime permanent n'impose pas l'immobilité des charges, celles-ci peuvent être mobiles et donner lieu à des courants. Les deux dernières équations de Maxwell donnent  $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  qui conduit au théorème d'Ampère, et  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , soit  $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ . C'est le régime de la magnétostatique.

L'électromagnétisme est une théorie classique des champs. Ces champs sont les coordonnées du quadri-potential, c'est-à-dire le potentiel scalaire  $\phi$  et les composantes du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . Ils déterminent les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  par

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}. \tag{1.2}$$

Comme ces relations ne sont pas univoques, on impose une condition supplémentaire : la jauge de Lorenz

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0. \quad (1.3)$$

La formulation habituelle de l'électromagnétisme consiste à postuler les équations de Maxwell pour en déduire les équations de propagation des potentiels :

$$\begin{aligned} \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

## 2. Principes variationnels en théorie classique des champs

Le principe de la méthode variationnelle repose sur le choix d'une "famille de fonctions d'essais" supposée représenter une quantité physique à partir de laquelle on calcule une propriété déterminée. La minimisation de la valeur correspondante par rapport à un ou plusieurs paramètres variationnels fournit les conditions qui s'avèrent les plus voisines de la réalité physique parmi les fonctions d'essais choisies.

### 2.1. Le principe de moindre action en mécanique analytique

On considère un système à  $n$  degrés de liberté  $\alpha = 1, \dots, n$  décrit par les coordonnées  $q_\alpha(t)$  et les vitesses  $\dot{q}_\alpha(t)$ . On cherche une équation régissant l'évolution du système d'un point  $A(q_\alpha(t_a), t_a)$  à un point  $B(q_\alpha(t_b), t_b)$ . La dynamique du système est entièrement déterminée par une fonction  $L$  appelée lagrangien :

$$L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t).$$

Le principe de moindre action d'Hamilton stipule que la trajectoire réelle du système est telle qu'une quantité  $S[q_\alpha(t)]$ , appelée action, est stationnaire :

$$S[q_\alpha(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(q_\alpha(t), \dot{q}_\alpha(t), t) dt, \quad \delta S[q_\alpha(t)] = 0. \quad (1.5)$$

C'est une fonctionnelle de  $q_\alpha(t)$  et  $\dot{q}_\alpha(t)$ . Ce principe signifie que si l'on considère la trajectoire réelle notée  $q_\alpha^0(t)$  entre  $A$  et  $B$  et une autre trajectoire joignant les points  $A$  et  $B$  et différant de la trajectoire réelle d'une quantité  $\delta q_\alpha(t)$  :

$$q_\alpha(t) = q_\alpha^0(t) + \delta q_\alpha(t),$$

alors la variation (fonctionnelle) de l'action est nulle au premier ordre en  $\delta q_\alpha(t)$ . On peut montrer qu'en fait la trajectoire réelle correspond à un minimum pour l'action <sup>(18)</sup>

<sup>(18)</sup> Corollaire : le calcul de l'action à partir d'une trajectoire différente conduit nécessairement à une borne supérieure pour  $S$ .

Par généralisation de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables,  $S(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i L(q_i, \dot{q}_i)$ ,

$$dS(q_i, \dot{q}_i) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i,$$

la variation de  $S$  s'écrit

$$\delta S[q_\alpha(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right) dt.$$

Les variables  $q_\alpha(t)$  et  $\dot{q}_\alpha(t)$  ne sont pas indépendantes, car entre  $t_a$  et  $t_b$  la connaissance de  $q_\alpha(t)$  détermine  $\dot{q}_\alpha(t)$ . Pour éliminer  $\delta \dot{q}_\alpha(t) = \frac{d}{dt}(\delta q_\alpha(t))$ , on intègre par parties le second terme :

$$\int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha dt = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha(t) \right]_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt.$$

Le terme intégré est nul à cause des conditions aux bornes,  $\delta q_\alpha(t_a) = \delta q_\alpha(t_b) = 0$ , et il reste :

$$\delta S[q_\alpha(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha(t) dt.$$

Comme la variation  $\delta q_\alpha(t)$  autour de la trajectoire réelle est arbitraire, pour assurer  $\delta S = 0$ , l'intégrand doit être nul, d'où l'on déduit les équations d'Euler – Lagrange, satisfaites par la trajectoire réelle  $q_\alpha^0(t)$  :

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = 0. \quad (1.6)$$

On obtient une équation différentielle semblable pour chaque degré de liberté.

Dans le cas d'une particule ponctuelle de masse  $m$ , d'énergie cinétique  $T$ , soumise à une énergie potentielle extérieure  $\mathcal{U}$ , le lagrangien s'écrit :

$$L = T - \mathcal{U}$$

et l'équation d'Euler redonne le principe fondamental de la dynamique de Newton :

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \dot{q}^2, & \mathcal{U} = \mathcal{U}(q) \\ \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} = F \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (m \dot{q}) = \frac{dp}{dt} \end{cases}$$

soit

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

## 2.2. Principe variationnel en électrostatique

En l'absence de charges, la minimisation de l'énergie électrostatique conduit à l'équation de Laplace. En présence de charges, le problème se complique et tout réside dans la fonctionnelle qui va jouer le rôle de l'action. Suivant Feynman, postulons le principe suivant :

Le potentiel électrostatique réel est celui qui minimise la quantité  $\mathcal{U}^*[\phi(\mathbf{r})]$  :

$$\mathcal{U}^*[\phi(\mathbf{r})] = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int (\nabla\phi)^2 d\tau - \int \rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) d\tau. \quad (1.7)$$

En effet, écrire que  $\delta\mathcal{U}^* = 0$  au premier ordre en  $\delta\phi$  entraîne l'équation de Poisson : on pose encore une fois

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi^0(\mathbf{r}) + \delta\phi(\mathbf{r})$$

de sorte que  $\delta\phi(\mathbf{r})$  s'annule aux limites  $A$  et  $B$ . Posons

$$\mathcal{U}^*[\phi(x, y, z)] = \int u(\phi, \nabla\phi) dx dy dz$$

$$u(\phi, \nabla\phi) = -\rho(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\varepsilon_0(\nabla\phi)^2$$

et écrivons la variation fonctionnelle :

$$\delta\mathcal{U}^* = \int_A^B \left[ \frac{\partial u}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial u}{\partial(\nabla\phi)} \delta(\nabla\phi) \right] d\tau$$

avec la notation abrégée

$$\frac{\partial u}{\partial(\nabla\phi)} \delta(\nabla\phi) = \frac{\partial u}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)} \delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)} \delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)} \delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right).$$

Les bornes  $A$  et  $B$  sont par exemple les deux armatures d'un condensateur entre lesquelles on calcule  $\mathcal{U}^*$ . Comme  $\nabla\phi$  se déduit de  $\phi$ , on élimine  $\delta(\nabla\phi) = \nabla(\delta\phi)$  par intégration par parties (ou par le théorème de la divergence)

$$\int_A^B \frac{\partial u}{\partial(\nabla\phi)} \delta(\nabla\phi) d\tau = \left[ \frac{\partial u}{\partial(\nabla\phi)} \delta\phi \right]_A^B - \int_A^B \nabla \left( \frac{\partial u}{\partial(\nabla\phi)} \right) \delta\phi d\tau$$

(trois termes différents sont rassemblés ici). Avec les conditions aux limites sur  $\delta\phi$  (les limites peuvent d'ailleurs être à l'infini et dans ce cas  $\phi \rightarrow 0$  si la distribution de charges est d'extension non infinie), le terme intégré disparaît, il reste

$$\delta\mathcal{U}^* = 0 = \int_A^B \left[ \frac{\partial u}{\partial\phi} - \nabla \left( \frac{\partial u}{\partial(\nabla\phi)} \right) \right] \delta\phi d\tau$$

d'où l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial\phi} = \nabla \left[ \frac{\partial u}{\partial(\nabla\phi)} \right]. \quad (1.8)$$

Cela donne ici

$$\frac{\partial u}{\partial\phi} = -\rho(\mathbf{r}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial(\nabla\phi)} = \varepsilon_0 \nabla\phi$$

soit  $-\rho(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \nabla^2\phi$ , c'est-à-dire l'équation de Poisson

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}. \quad (1.9)$$

### 2.3. Le condensateur cylindrique

Le calcul conventionnel de la capacité du condensateur cylindrique utilise par exemple l'énergie électrostatique  $\mathcal{U}$  emmagasinée entre les armatures,  $\frac{1}{2}CV^2$ , si  $V$  est la tension, *i.e.* la différence de potentiel entre les armatures. Celle-ci se calcule aussi par la circulation du champ électrique, lui-même obtenu simplement grâce au théorème de Gauss : les cylindres sont supposés infinis pour éliminer les effets de bords.

$$a < \rho < b \quad E(\rho) \times 2\pi\rho h = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0\rho^2 h^2}$$

$$\mathcal{U} = h \int_a^b u 2\pi\rho d\rho = \frac{1}{2}Q^2 \frac{\ln b/a}{2\pi\varepsilon_0 h}$$

avec

$$Q = CV, \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

d'où

$$C_0 = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Pour trouver cette valeur exacte de  $C_0$ , il est nécessaire de trouver la fonction potentiel (ou champ électrique), ce qui n'est possible que pour des géométries simples.

Supposons que l'on ne connaisse pas cette fonction  $\phi^0$  et que l'on prenne une fonction d'essai  $\phi^{(\lambda)}(\rho)$ . On peut calculer la densité  $u^{(\lambda)} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (\nabla\phi^{(\lambda)})^2$  et intégrer sur l'espace compris entre les armatures pour trouver l'énergie  $\mathcal{U}^{(\lambda)}$  associée. Or, en électrostatique et en l'absence de charges,  $\frac{1}{2}\varepsilon_0 (\nabla\phi)^2$  est précisément la densité lagrangienne et son intégrale sur l'espace,  $\mathcal{U}$ , doit donc être minimale lorsque la fonction d'essai coïncide avec le potentiel réel. On sait donc qu'en déterminant en fonction de  $\lambda$  le minimum de  $\mathcal{U}^{(\lambda)}$ , on obtient la meilleure approximation du potentiel et donc de la capacité réelle, compatible avec la famille de fonctions d'essais choisie. Ce procédé nous fournit nécessairement une borne supérieure pour la capacité, évidemment d'autant plus proche de la réalité que le potentiel d'essai est réaliste. Au voisinage du minimum l'erreur sur la capacité est du second ordre lorsque celle qui est commise sur le potentiel est du premier ordre.

#### Exemple :

Considérons une fonction d'essai en loi de puissance :

$$\phi^{(\lambda)}(\rho) = \alpha\rho^\lambda + \beta.$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes déterminées par les conditions aux limites

$$\phi^{(\lambda)}(\rho = a) = \phi^0(a) = V,$$

$$\phi^{(\lambda)}(\rho = b) = \phi^0(b) = 0$$



soit

$$\alpha = \frac{V}{a^\lambda - b^\lambda}, \quad \beta = -\frac{b^\lambda}{a^\lambda - b^\lambda}V$$

$$\phi^{(\lambda)}(\rho) = \frac{V}{a^\lambda - b^\lambda} [\rho^\lambda - b^\lambda]$$

$$\left( \frac{d\phi^{(\lambda)}}{d\rho} \right)^2 = \left( \frac{\lambda V}{a^\lambda - b^\lambda} \rho^{\lambda-1} \right)^2.$$

On obtient

$$\mathcal{U}^{(\lambda)} = 2\pi\varepsilon_0 V^2 \times \frac{1}{4} \lambda \frac{b^\lambda + a^\lambda}{b^\lambda - a^\lambda} h$$

(à comparer au résultat réel connu  $\mathcal{U}_0 = 2\pi\varepsilon_0 V^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} h$  !) d'où l'on déduit la capacité associée à la fonction d'essai choisie :

$$\frac{C^{(\lambda)}}{2\pi\varepsilon_0 h} = \frac{1}{2} \lambda \frac{b^\lambda + a^\lambda}{b^\lambda - a^\lambda}$$

que l'on peut évaluer numériquement pour plusieurs valeurs de  $\lambda$  et comparer à titre d'exemple à la valeur exacte :

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_0}{2\pi\varepsilon_0 h}$	$C^{(\lambda)}/2\pi\varepsilon_0 h$				
		$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.1$	$\lambda = -1$
1.1	10.4921	10.5000	10.5238	10.4940	10.4921	10.5000
1.5	2.4663	2.5000	2.6000	2.4747	2.4666	2.5000
2.	1.4427	1.5000	1.6667	1.4571	1.4433	1.5000
4.	0.7213	0.8333	1.1333	0.7500	0.7225	0.8333

## 2.4. Formulation variationnelle de l'électromagnétisme

### 2.4.1. Densité lagrangienne

Une formulation alternative aux équations de Maxwell consiste à chercher une quantité à laquelle on puisse appliquer un principe variationnel. En l'absence de charges, la densité lagrangienne du champ électromagnétique s'écrit

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0}.$$

Le terme densité se justifie, puisque pour obtenir une grandeur extensive on intègre sur l'espace <sup>(19)</sup>. Le terme lagrangien se justifie par l'application d'un principe de minimisation.

<sup>(19)</sup>  $\frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2$  par exemple est la densité d'énergie électrique associée à l'existence d'un champ électrique.

En présence de charges (immobiles ou en mouvement), la densité lagrangienne s'écrit (Schwarzschild)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r})(\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} - \phi(\mathbf{r})) \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{v}$  est la vitesse des porteurs de charge,  $\rho(\mathbf{r})$  la densité de charges et  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})\mathbf{v}$  la densité de courant.

En fonction des potentiels, on a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left( -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} (\mathbf{rot}\mathbf{A})^2 + \rho(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - \phi). \quad (1.11)$$

Si on note de manière générique  $\psi_j$  pour  $\phi$ ,  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$ , les quatre champs scalaires,  $\mathcal{L}$  est une fonction de ces champs et de leurs dérivées spatiales et temporelles

$$\mathcal{L} \left( \psi_j, \dot{\psi}_j, \frac{\partial\psi_j}{\partial x}, \frac{\partial\psi_j}{\partial y}, \frac{\partial\psi_j}{\partial z} \right).$$

### 2.4.2. Equations d'Euler – Lagrange généralisées

La nouveauté pour une théorie des champs, par rapport à un système ayant un nombre fini de degrés de libertés, réside dans l'apparition des dérivées spatiales

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_j} - \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha})} \right] - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_j} \right) = 0. \quad (1.12)$$

### 2.4.3. Propagation des potentiels

Appliquées aux composantes du quadripotential, les équations d'Euler – Lagrange permettent de retrouver les équations de propagation pour le potentiel scalaire et les composantes du potentiel vecteur.

Postuler la minimisation de l'action définie par la densité lagrangienne de Schwarzschild conduit donc aux mêmes équations de propagation que les équations de Maxwell. Cette formulation de l'électromagnétisme est rarement employée en raison de son caractère assez axiomatique. Elle présente toutefois un grand intérêt physique, puisque de nombreux domaines de la physique peuvent être décrits par des principes variationnels qui apparaissent ainsi comme un contexte unificateur.



# Chapitre 2

## Notions élémentaires d'électrostatique

On considèrera des distributions statiques de charges, c'est-à-dire indépendantes du temps et sans mouvement de charges. Il n'y a par conséquent pas de courant électrique et l'équation de conservation de la charge électrique

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

est satisfaite avec  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  et  $\mathbf{j} = \mathbf{0}$ .

### 1. Charges ponctuelles et distributions de charges ponctuelles

#### 1.1. Force coulombienne entre deux charges

On constate expérimentalement que la force  $\mathbf{F}_{q \rightarrow q'}$ , exercée par une charge ponctuelle  $q$  sur une charge ponctuelle  $q'$  distante de  $r$  a les propriétés suivantes :

- elle décroît comme  $1/r^2$ ,
- elle est proportionnelle au produit des charges  $qq'$ ,
- elle est attractive (répulsive) si  $qq' < 0$  ( $qq' > 0$ ) et colinéaire à la distance entre les charges.

$$\mathbf{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r. \quad (2.1)$$

La charge électrique s'exprime en coulombs (C) et on a les équations aux dimensions :

$$\begin{aligned} [F] &= \mathfrak{MLT}^{-2} \\ [q] &= \mathfrak{C} \text{ (charge)} \\ [\varepsilon_0] &= [q]^2[r]^{-2}[F]^{-2} \\ &= \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-3}\mathfrak{T}^2\mathfrak{C}^2 \end{aligned}$$

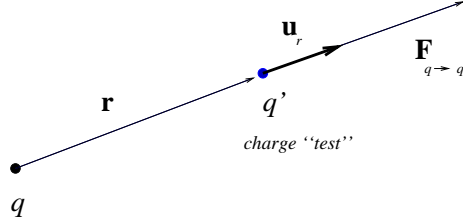


Figure 2.1 Force coulombienne exercée par  $q$  sur  $q'$  (charges de même signe).

## 1.2. Énergie potentielle d'un système de deux charges

Soient deux charges  $q$  et  $q'$ . Les paramètres pertinents pour exprimer les quantités physiques (dont l'énergie) sont  $q$ ,  $q'$ ,  $r$  la distance entre les charges et  $4\pi\varepsilon_0$ , soit

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{q \rightarrow q'} &= f(4\pi\varepsilon_0, q, q', r), \\ \lambda_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{q \rightarrow q'} &= f(\lambda_{4\pi\varepsilon_0} 4\pi\varepsilon_0, \lambda_q q, \lambda_{q'} q', \lambda_r r). \end{aligned}$$

Comme  $[\mathcal{U}] = \mathfrak{ML}^2\mathfrak{T}^{-2}$ , on a  $\lambda_{\mathcal{U}} = \lambda_m \lambda_r^2 \lambda_t^{-2}$ . Avec  $\lambda_{4\pi\varepsilon_0} = \lambda_m^{-1} \lambda_r^{-3} \lambda_t^2 \lambda_q^2$  on forme la combinaison  $\lambda_q^2 \lambda_{q'} \pi \varepsilon_0^{-1} \lambda_r^{-1} = \lambda_{\mathcal{U}}$  et on fait le choix habituel  $\lambda_x = x^{-1}$  (qui signifie que l'on choisit de mesurer la grandeur  $x$  en unités  $x$ ) pour obtenir l'expression fonctionnelle de l'énergie du système de charges  $\lambda_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{q \rightarrow q'} = f(1, 1, q'/q, 1)$  soit

$$\mathcal{U}_{q \rightarrow q'} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} f(q'/q). \quad (2.2)$$

Ce résultat est correct, puisque l'expression exacte se déduit de l'expression de la force de Coulomb :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{q \rightarrow q'} &= -\frac{d\mathcal{U}_{q \rightarrow q'}}{dr} \mathbf{u}_r, \text{ soit } \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{d\mathcal{U}_{q \rightarrow q'}}{dr}, \\ \int d\mathcal{U}_{q \rightarrow q'} &= -\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r^2}, \\ \mathcal{U}_{q \rightarrow q'} &= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r} + \mathcal{U}_0. \end{aligned}$$

La constante est arbitraire. On utilise la convention d'une énergie potentielle nulle lorsque la distance entre les charges est infinie, soit  $\mathcal{U}_0 = 0$  et<sup>(20)</sup>

$$\mathcal{U}_{q \rightarrow q'} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (2.3)$$

L'énergie potentielle est positive décroissante et s'annule à l'infini si les charges sont de même signe (elles se repoussent), elle est négative et croissante dans le cas contraire (attraction).

<sup>(20)</sup> On a simplement  $f(q'/q) = q'/q$ .

### 1.3. Charge test unité ( $q' = 1$ ) : définition du potentiel électrostatique et du champ électrique

On caractérise la charge  $q$  seule par l'effet qu'elle aurait sur une charge test unité  $q' = 1$  C. On définit alors le **champ électrique** (ou électrostatique)

$$\mathbf{E}_q \equiv \mathbf{F}_{q \rightarrow 1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{F}_{q \rightarrow q'} = q' \mathbf{E}_q. \quad (2.4)$$

C'est le champ électrique coulombien qui obéit à l'équation aux dimensions  $[E_q] = \mathfrak{ML}^2\mathfrak{T}^{-2}\mathfrak{C}^{-1}$ . On définit de même le potentiel électrostatique à partir de l'énergie potentielle de la charge test :

$$\phi_q \equiv \mathcal{U}_{q \rightarrow 1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \mathcal{U}_{q \rightarrow q'} = q' \phi_q. \quad (2.5)$$

Le potentiel obéit à l'équation aux dimensions  $[\phi_q] = \mathfrak{ML}^2\mathfrak{T}^{-2}\mathfrak{C}^{-1} = [E_q]\mathfrak{L}$ .

On appelle volt (V) l'unité de potentiel, celle du champ électrique est donc le volt par mètre ( $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ ). Il est utile de noter que  $[q\phi]$  est une énergie et  $[qE]$  est une force.

La relation  $\mathbf{F}_{q \rightarrow q'} = -\frac{d\mathcal{U}_{q \rightarrow q'}}{dr} \mathbf{u}_r$  se traduit par une expression analogue entre potentiel et champ :

$$\mathbf{E}_q = E_q(r) \mathbf{u}_r = -\frac{d\phi_q}{dr} \mathbf{u}_r. \quad (2.6)$$

On retrouve bien la relation

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

La convention sur l'énergie potentielle à l'infini se généralise au potentiel électrostatique : celui-ci s'annule à l'infini sous réserve qu'il n'y ait pas de charges à l'infini.

De manière générale, on note que le champ électrique  $\mathbf{E}$  dérive d'un potentiel scalaire,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ .

#### Remarques :

i) Les composantes de  $\nabla$  en coordonnées sphériques s'obtiennent à partir de la définition de la différentielle  $df(r, \theta, \varphi) = \nabla f \cdot d\mathbf{l}$  où  $d\mathbf{l} = dr \mathbf{u}_r + r d\theta \mathbf{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \mathbf{u}_\varphi$  est le déplacement élémentaire, soit

$$\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi = (\nabla f)_r dr + (\nabla f)_\theta r d\theta + (\nabla f)_\varphi r \sin \theta d\varphi.$$

Finalement il vient

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi.$$

Chaque composante est bien homogène à  $[f]L^{-1}$  où  $[f]$  exprime la dimension de  $f$ .

ii) La circulation de  $\mathbf{E}$  est liée à la différence de potentiel :  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = -d\phi$ . Entre deux points quelconques  $A$  et  $B$  on a donc :

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_A^B d\phi = \phi_A - \phi_B.$$

Ce résultat est indépendant du chemin suivi entre  $A$  et  $B$ .

iii) Le rotationnel de  $\mathbf{E}$  est nul. En effet, de la propriété précédente il découle que la circulation du champ électrique le long d'un circuit fermé est nulle  $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ . Or le théorème de Stokes permet de transformer cette expression

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{S(C)} \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

où la surface  $S(C)$  est quelconque mais s'appuie sur le contour fermé  $C$  (les orientations de  $d\mathbf{l}$  et  $d\mathbf{S}$  sont compatibles<sup>(21)</sup>). Il en résulte que

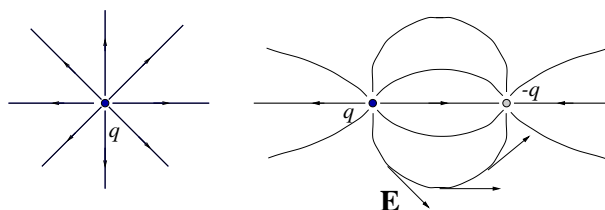
$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (2.7)$$

Ces propriétés subsistent pour le champ créé par un ensemble de charges.

## 1.4. Lignes de champ et équipotentielles

Les lignes de champ et les équipotentielles sont des courbes et des surfaces qui permettent de représenter la topographie du champ et du potentiel électrostatiques d'une distribution de charges. Une ligne de champ est une courbe orientée telle qu'en chaque point, le champ électrique lui est tangent. Son orientation est donnée par le sens du champ. Les charges positives créent des champs divergents (les lignes sont orientées de la charge vers l'extérieur) alors que les lignes convergent vers les charges négatives. Les lignes de champ prennent naissance et meurent soit sur des charges, soit à l'infini.

Une question qui a des conséquences importantes dans la suite est celle du dénombrement des lignes de champ. On peut évidemment dessiner un nombre arbitraire de lignes de champ, puisqu'en chaque point de l'espace il passe une ligne de champ au moins, il y en a donc une infinité indénombrable. Supposons que l'on décide d'en représenter  $N$  régulièrement réparties. Leur direction et sens donnent une idée de l'allure générale du champ. Leur densité donne également l'intensité du champ. Considérons le cas d'une charge unique  $q$ . Etant donnée une surface élémentaire quelconque  $d\mathbf{S}$ , par combien de lignes de champ est-elle traversée ?



**Figure 2.2** Allure des lignes de champ d'une charge unique et de deux charges opposées.

La quantité cherchée est exactement le nombre de lignes de champ qui sont à l'intérieur du cône issu de  $q$  et s'appuyant sur  $d\mathbf{S}$ <sup>(22)</sup>, ou sur la surface projetée perpendiculairement à l'axe du cône,  $dS_{\perp}$ . Cette surface étant à la distance  $r$  de la charge, le nombre  $dn$  de lignes traversant  $dS_{\perp}$  est simplement le nombre total  $N$  que multiplie le rapport  $dS_{\perp}/4\pi r^2$  de la surface projetée à la surface totale de la sphère  $\Sigma$  de rayon  $r$ . Une surface est orientée, le nombre cherché est compté positivement si

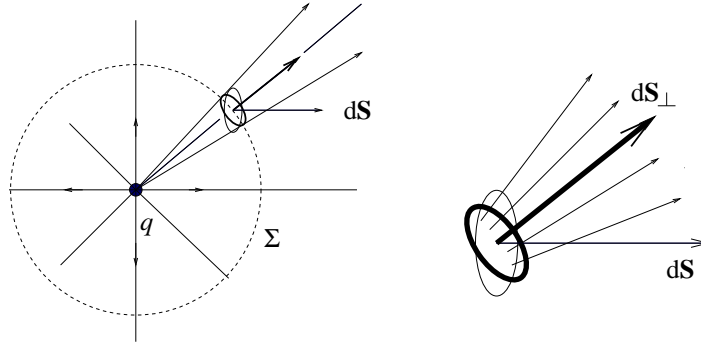
<sup>(21)</sup> Le circuit étant orienté, la rotation d'un pas de vis dans ce sens ferait progresser la vis dans le sens de la normale à  $S$ . Lorsque la surface est fermée, on oriente conventionnellement la surface vers l'extérieur.

<sup>(22)</sup> Le vecteur surface est orienté perpendiculairement à la surface.

les lignes de champ traversent dans le sens de l'orientation de la surface comme sur la figure, négativement dans le cas contraire. On a donc ici

$$dn = N \frac{dS_{\perp}}{4\pi r^2}, \quad (2.8)$$

qui redonne par intégration  $\oint_{\Sigma} dn = N$  (le symbole  $\oint_{\Sigma}$  signifie que l'intégrale est étendue à la surface fermée  $\Sigma$  et une surface fermée est toujours orientée vers l'extérieur). Le nombre  $dn/N dS_{\perp}$  varie avec la distance en  $1/r^2$  comme le champ coulombien<sup>(23)</sup>.

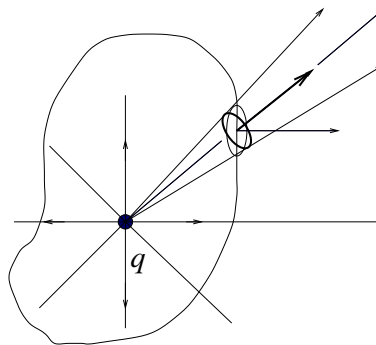


**Figure 2.3** Dénombrement des lignes de champ traversant une surface élémentaire quelconque. Ce sont celles qui traversent la surface projetée  $dS_{\perp}$  représentée en traits épais.

On peut ainsi écrire

$$E_q dS_{\perp} = \frac{q}{\varepsilon_0} \frac{dn}{N}.$$

Pour n'importe quelle surface fermée  $\Sigma$  entourant la charge, on a le même résultat,  $\oint_{\Sigma} dn = N$ , en revanche si la charge  $q$  n'est pas entourée par la surface  $\Sigma$ , on aura  $\oint_{\Sigma} dn = 0$  car il y a autant de lignes qui entrent dans  $\Sigma$  (comptées négativement) que de lignes qui en sortent (comptées positivement).



**Figure 2.4** Surface fermée entourant la charge ponctuelle  $q$ .

On définit habituellement le **flux** du champ électrique à travers une surface élémentaire par

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS_{\perp}. \quad (2.9)$$

<sup>(23)</sup> On appelle angle solide élémentaire du cône la quantité  $\frac{dS_{\perp}}{r^2}$ . Son intégrale sur la sphère complète vaut  $4\pi$  et s'exprime en stéradians (au même titre que les angles, c'est une quantité sans dimension, puisqu'elle est définie par une rapport de surfaces).



Son intégrale à travers une surface fermée donne

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \oint_{\Sigma} \frac{dS_{\perp}}{4\pi r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0} \oint_{\Sigma} \frac{dn}{N}. \quad (2.10)$$

Selon que la surface  $\Sigma$  contient  $q$  ou non, on a

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{si } q \in \Sigma$$

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 0 \quad \text{si } q \notin \Sigma.$$

C'est un résultat très important qui sera utilisé par la suite.

Les surfaces équipotentielles sont telles qu'en tout point le potentiel électrostatique a même valeur. Elles sont perpendiculaires aux lignes de champ. Dans le cas d'une charge ponctuelle unique, les équipotentielles obéissent à l'équation  $q/4\pi\varepsilon_0 r = \text{const.}$  et ce sont des sphères centrées sur la position de la charge.

## 2. Systèmes de charges ponctuelles

### 2.1. Superposition des potentiels et des champs

On considère un système  $\Omega = \{q_i\}_{i=1,\dots,N}$  de charges ponctuelles  $q_i$  en présence duquel on place une charge test  $q'$  en un point  $M$  repéré depuis une origine arbitraire par  $\mathbf{r}$ . Les forces exercées sur  $q'$  sont additives, on exprime donc la force totale (somme vectorielle) s'exerçant sur  $q'$  :

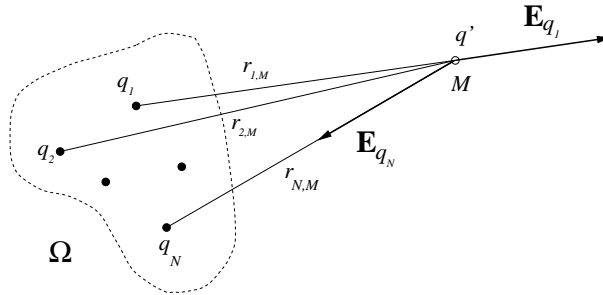


Figure 2.5 Système  $\Omega$  de  $N$  charges ponctuelles  $q_i$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\Omega \rightarrow q'} &= \mathbf{F}_{q_1 \rightarrow q'} + \mathbf{F}_{q_2 \rightarrow q'} + \dots + \mathbf{F}_{q_N \rightarrow q'} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{q_i \rightarrow q'} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{4\pi\varepsilon_0 r_{i,M}^2} \mathbf{u}_{i,M} \\ &= q' \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{i,M}^2} \mathbf{u}_{i,M} \\ &= q' \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_{q_i} = q' \mathbf{E}_{\Omega} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que le champ électrique total en  $M$  s'obtient par superposition vectorielle :

$$\mathbf{E}_\Omega(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_{q_i}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{i,M}^2} \mathbf{u}_{i,M}. \quad (2.11)$$

De même, l'énergie potentielle de la charge  $q'$  est une quantité scalaire additive. L'énergie de  $q'$  en présence des charges constituant le système  $\Omega$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\Omega \rightarrow q'} &= \mathcal{U}_{q_1 \rightarrow q'} + \mathcal{U}_{q_2 \rightarrow q'} + \dots + \mathcal{U}_{q_N \rightarrow q'} = \sum_{i=1}^N \mathcal{U}_{q_i \rightarrow q'} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{4\pi\epsilon_0 r_{i,M}} \\ &= q' \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{i,M}} \\ &= q' \sum_{i=1}^N \phi_{q_i} = q' \phi_\Omega \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que le potentiel électrique total en  $M$  s'obtient par superposition scalaire :

$$\phi_\Omega(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \phi_{q_i}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_{i,M}}. \quad (2.12)$$

## 2.2. Symétries et invariances

Le champ électrique et le potentiel obéissent à des propriétés de symétrie très utiles qui résultent du principe de Curie qui stipule que les symétries des effets sont au moins aussi élevées que celles des causes. Les causes sont ici les distributions de charges et l'existence d'un champ et d'un potentiel en constituent les effets. Ces propriétés de symétrie sont très utiles pour déterminer la direction du champ électrique et les variables dont dépendent les grandeurs physiques.

S'il existe un plan de symétrie d'une distribution de charges par exemple, en tout point de ce plan, le champ électrique est contenu dans le plan. S'il s'agit d'un axe de symétrie, le champ sur l'axe est porté par l'axe lui-même. Considérons le cas de quatre charges identiques situées aux sommets d'un carré. L'application des arguments précédents montre que sur l'axe perpendiculaire au carré, le champ est porté par l'axe, alors qu'en tout point du plan du carré, le champ est dans ce plan. Comme corollaire on en déduit qu'au centre du carré le champ est nul car il ne peut pas être à la fois dans le plan et perpendiculaire à celui-ci.

De plus, lorsqu'une distribution de charges est invariante par une opération de translation d'une variable (translation continue parallèlement à un axe ou rotation continue autour d'un axe), le module du champ ainsi que toute autre grandeur physique est indépendant de cette variable.

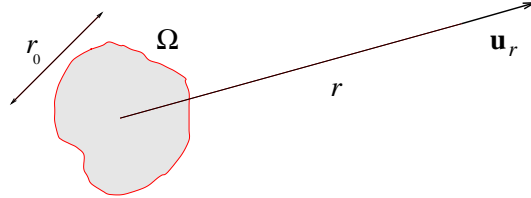
Les propriétés de symétrie et d'invariance permettent toujours de simplifier a priori la recherche du champ ou du potentiel, elles doivent donc systématiquement être exploitées dès que l'on aborde un problème physique.

### 3. Distributions continues de charges

#### 3.1. Comportements asymptotiques

On considère une distribution de charges  $\Omega$  quelconque. On note  $Q$  la charge totale et  $r_0$  l'extension spatiale caractéristique de la distribution (par exemple la distance moyenne entre deux charges ou le rayon typique de la distribution). A grande distance  $r \gg r_0$ , lorsque les détails de la distribution sont sans effet majeur, on attend un comportement purement coulombien pour le potentiel et le champ :

$$\phi_{\Omega}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \mathbf{E}_{\Omega}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r, \quad r \gg r_0$$



**Figure 2.6** Comportements asymptotiques du potentiel et du champ créés par une distribution chargée quelconque à grande distance.

Pour des raisons dimensionnelles, on peut donc écrire à toute distance

$$\begin{aligned} \phi_{\Omega}(r, \theta, \varphi) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} f_{\Omega}(r_0/r, \theta, \varphi), \\ E_{\Omega, x_i}(r, \theta, \varphi) &= \mathbf{E}_{\Omega}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{x_i} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} g_{\Omega, x_i}(r_0/r, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les fonctions  $f_{\Omega}$  et  $g_{\Omega}$  dépendent bien entendu de la forme de la distribution. Elles tendent vers 1 lorsque  $r \rightarrow \infty$ . Si la distribution est à symétrie sphérique par exemple, ces fonctions ne dépendent pas des angles. Si la charge totale  $Q$  est nulle, mais qu'il y a bien des charges dans  $\Omega$  (distribution globalement neutre), la décroissance sera plus rapide (que  $1/r$  pour le potentiel ou  $1/r^2$  pour le champ), comme c'est le cas pour le dipôle.

On admettra une propriété importante du potentiel électrostatique : c'est une fonction continue en tout point (sauf bien entendu en cas de divergence sur une charge ponctuelle par exemple).

L'énergie totale de la distribution pour sa part est nécessairement de la forme

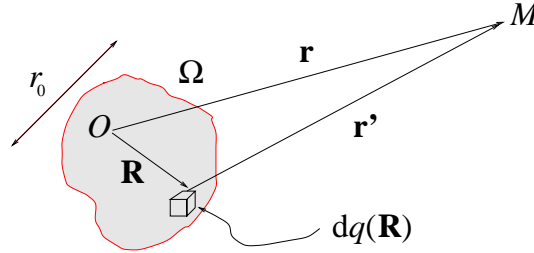
$$\mathcal{U}_{\Omega} = \text{constante} \times \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \quad (2.14)$$

où la constante est un coefficient numérique sans dimension, qui dépend de la forme précise de  $\Omega$  et de la manière dont la charge électrique est répartie dans le système.

### 3.2. Théorème de superposition scalaire pour le potentiel

La matière chargée se réduit en dernière analyse à des distributions de charges ponctuelles négatives (électrons) ou positives (ions). Lorsque l'on se place à une échelle de longueur importante devant les charges individuelles, on peut remplacer la structure microscopique par une densité continue de charges. Une charge élémentaire  $dq(\mathbf{R})$  créée en un point  $M$  distant de  $r' = |\mathbf{r} - \mathbf{R}|$  un potentiel élémentaire

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{dq(\mathbf{R})}{4\pi\epsilon_0 r'} = \frac{dq(\mathbf{R})}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{R}|}.$$



**Figure 2.7** Distribution de charges arbitraire  $\Omega$ . L'origine est fixée en un point  $O$  quelconque (ici à l'intérieur de  $\Omega$ ), l'élément de volume  $d\tau$  repéré depuis l'origine par  $\mathbf{R}$  contient une charge  $dq(\mathbf{R})$ . Le point d'observation est repéré depuis l'origine par  $\mathbf{r}$  et la distance  $r'$  entre  $dq(\mathbf{R})$  et  $M$  s'écrit aussi  $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ .

Le théorème de superposition du potentiel vaut pour une distribution a priori arbitraire<sup>(24)</sup>, donc si les charges sont réparties continûment dans  $\Omega$  on remplace la somme discrète par une intégrale sur le volume chargé :  $\sum_{\mathbf{R} \in \Omega} \rightarrow \int_{\Omega}$  et le potentiel total s'écrit

$$\phi_{\Omega}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{dq(\mathbf{R})}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{R}|}. \quad (2.15)$$

Dans la pratique on distingue plusieurs types de distributions continues de charges.

- Distribution volumique : les charges sont supposées réparties dans le volume considéré. On définit la densité volumique de charges  $\rho(\mathbf{R})$  telle que  $dq(\mathbf{R}) = \rho(\mathbf{R}) d\tau$  où  $d\tau$  est un volume élémentaire situé en  $\mathbf{R}$  par rapport à l'origine<sup>(25)</sup>. L'expression intégrale du potentiel prend la forme particulière

$$\phi_{\Omega}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{R}) d\tau}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{R}|}. \quad (2.16)$$

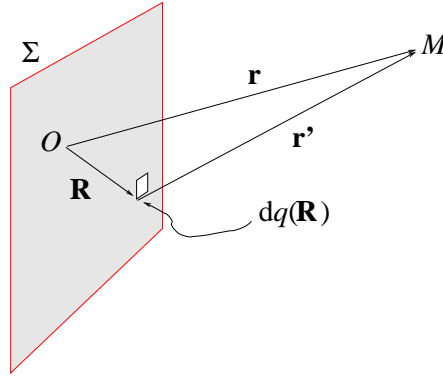
$\mathbf{R}$  est un vecteur à 3 composantes. Du point de vue dimensionnel, on a  $[\rho] = \mathfrak{C}\mathfrak{L}^{-3}$ . L'intégrale est une intégrale triple, elle porte sur les composantes de  $\mathbf{R}$  qui repère l'élément de volume  $d\tau$  dans  $\Omega$ .

- Distribution surfacique : si l'épaisseur de la distribution (par exemple  $dz$ ) est très petite devant les autres dimensions, on peut considérer que  $\rho(\mathbf{R})$  ne varie pas de manière significative dans l'épaisseur et l'on définit une densité surfacique  $\sigma(\mathbf{R})$  par

$$dq(\mathbf{R}) = \rho(x, y) dx dy dz = \sigma(x, y) dx dy, \text{ avec } \sigma(x, y) = \frac{dq(\mathbf{R})}{dS}.$$

<sup>(24)</sup> Il faut en fait que l'extension spatiale de la distribution reste finie pour que l'expression intégrale converge.

<sup>(25)</sup> En coordonnées cartésiennes on a  $d\tau = dx dy dz$ , en sphériques on a  $d\tau = R^2 dR \sin \theta d\theta d\varphi$ .



**Figure 2.8** Distribution surfacique de charges arbitraire  $\Sigma$ .

On écrit dans ce cas une intégrale étendue à une surface  $\Sigma$

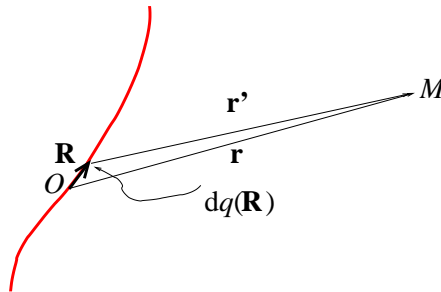
$$\phi_{\Sigma}(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma} \frac{\sigma(\mathbf{R}) dS}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{R}|}, \quad (2.17)$$

Si l'origine est bien choisie,  $\mathbf{R}$  est un vecteur à 2 composantes et l'intégrale est double, de plus  $[\sigma] = \mathfrak{C}\mathfrak{L}^{-2}$ .

• Distribution linéique : si la distribution est filiforme,  $\mathcal{L}$ ; une seule coordonnée ( $x$  par exemple) intervient. On définit

$$dq(\mathbf{R}) = \rho(x) dx dy dz = \lambda(x) dx, \text{ avec } \lambda(x) = \frac{dq(\mathbf{R})}{dx},$$

$$\phi_{\mathcal{L}}(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda(\mathbf{R}) dx}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{R}|}, \quad (2.18)$$



**Figure 2.9** Distribution linéique de charges arbitraire  $\mathcal{L}$ .

Si l'origine est bien choisie,  $\mathbf{R}$  est un vecteur à 1 composante et l'intégrale est simple,  $[\lambda] = \mathfrak{C}\mathfrak{L}^{-1}$ .

### Remarques :

i) L'expression intégrale du potentiel ne converge que s'il n'y a pas de charges à l'infini. Dans le cas contraire, il faut soit utiliser une procédure de régularisation de l'intégrale avec un passage à la limite, soit calculer d'abord le champ puis en déduire le potentiel par intégration <sup>(26)</sup>.

<sup>(26)</sup> Dans le cas d'un fil infini portant une densité linéique de charges constante  $\lambda$  par exemple, l'expression intégrale du potentiel donne  $\phi(r) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \cos \alpha} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$  qui diverge ( $\alpha$  est l'angle sous lequel est vu l'élément de longueur du fil depuis le point d'observation situé à la distance  $r$  du fil). Le champ en revanche vaut  $E_r = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \cos \alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$  et s'intègre pour donner  $\phi(r) = - \int_a^r E_r dr = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a}$ .

ii) Les exemples classiques d'application de ces expressions intégrales sont le cas du fil circulaire ou du disque chargés (calcul sur l'axe), les distributions surfaciques non uniformes en géométrie sphérique ( $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ , calcul au centre de la sphère)...

### 3.3. Exemples

#### 3.3.1. Fil circulaire chargé

On considère un fil circulaire de rayon  $r_0$ , de centre  $O$ , portant une charge totale  $Q$  répartie uniformément sur sa circonférence. On cherche à déterminer le potentiel en un point quelconque de l'axe du cercle à une distance  $z$  du point  $O$ . On attend la forme

$$\phi_{\text{cercle}}(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z} f(r_0/z)$$

et le comportement  $f(R/z) \rightarrow 1$  si  $z \rightarrow \infty$  pour retrouver l'expression coulombienne à grande distance.

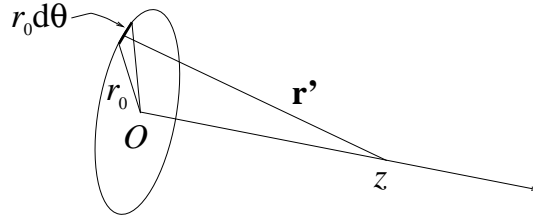


Figure 2.10 Distribution linéique de charges sur un cercle.

La charge est répartie sur une ligne. Pour un élément de cercle d'angle d'ouverture  $d\theta$  on a  $dq = \frac{r_0 d\theta}{2\pi r_0} Q = \frac{d\theta}{2\pi} Q$ , soit<sup>(27)</sup>

$$d\phi_{\text{cercle}} = \frac{d\theta}{2\pi} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r_0^2)^{1/2}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\phi_{\text{cercle}}(z) = \int_0^{2\pi} d\phi_{\text{cercle}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z} (1 + r_0^2/z^2)^{-1/2}.$$

Lorsque  $z \rightarrow 0$ ,  $f(r_0/z) \rightarrow z/r_0$  et  $\phi_{\text{cercle}}(0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$  alors que lorsque  $z \rightarrow \infty$ ,  $f(r_0/z) \rightarrow 1$  et l'on retrouve bien le potentiel purement coulombien  $\phi_{\text{cercle}}(z \gg r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}$ . A toute distance, on peut obtenir l'expression du champ électrique sur l'axe par

$$\mathbf{E}_{\text{cercle}} = E_z(z) \mathbf{u}_z, \quad E_z(z) = -\frac{d\phi_{\text{cercle}}}{dz} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} (1 + r_0^2/z^2)^{-3/2}.$$

<sup>(27)</sup> On peut aussi utiliser la densité linéique  $\lambda = Q/2\pi r_0$  et  $dq = \lambda r_0 d\theta$ .

### 3.3.2. Disque chargé

Le cas d'un disque chargé est un peu plus compliqué car la distribution est surfacique cette fois. A la distance  $\rho$  de  $O$ , la surface élémentaire  $\rho d\rho d\theta$  contient la charge  $dq = \frac{\rho d\rho d\theta}{\pi r_0^2} Q$  et cet élément de surface<sup>(28)</sup> est distant du point d'observation en  $z > 0$  sur l'axe de  $(z^2 + \rho^2)^{1/2}$ , soit

$$\begin{aligned} d\phi_{\text{disque}} &= \frac{\rho d\rho d\theta}{\pi r_0^2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(z^2 + \rho^2)^{1/2}}, \quad 0 \leq \rho \leq r_0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \phi_{\text{disque}}(z) &= \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} d\phi_{\text{disque}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \int_0^{r_0} \frac{2\rho d\rho}{(z^2 + \rho^2)^{1/2}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \left[ 2(z^2 + r_0^2)^{1/2} - 2z \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z} \frac{2z^2}{r_0^2} \left[ (1 + r_0^2/z^2)^{1/2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

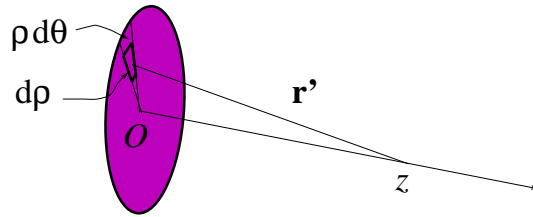


Figure 2.11 Distribution surfacique de charges sur un disque.

qui redonne bien la limite coulombienne  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}$  quand  $z \rightarrow \infty$ . Le champ électrique s'obtient par dérivation :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{disque}} &= E_z(z) \mathbf{u}_z, \quad E_z(z) = -\frac{d\phi_{\text{disque}}}{dz} \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} 2 \left[ \frac{1}{2} (z^2 + r_0^2)^{-1/2} 2z - 1 \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{2z^2}{r_0^2} \left[ 1 - (1 + r_0^2/z^2)^{-1/2} \right]. \end{aligned}$$

## 3.4. Théorème de superposition vectorielle pour le champ électrique

On raisonne de la même manière que pour le potentiel, mais cette fois on somme des quantités vectorielles. Une charge élémentaire  $dq(\mathbf{R})$  crée en un point  $M$  distant de  $r' = |\mathbf{r} - \mathbf{R}|$  un champ élémentaire

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{dq(\mathbf{R})}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2} \mathbf{u}_r,$$

<sup>(28)</sup> On peut également travailler avec la densité surfacique  $\sigma = Q/\pi r_0^2$  et  $dq = \sigma \rho d\rho d\theta$ .

où le vecteur unitaire peut encore s'écrire sous la forme

$$\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}'}{r'} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}.$$

Le théorème de superposition des champs électriques donne alors<sup>(29)</sup>

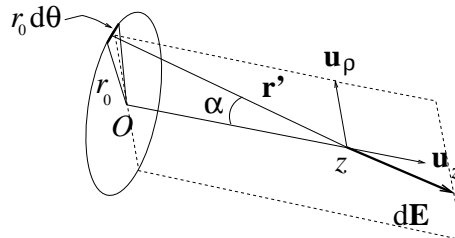
$$\mathbf{E}_\Omega(\mathbf{r}) = \int_\Omega \frac{dq(\mathbf{R})}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}. \quad (2.19)$$

On adapte ensuite cette expression aux trois types de distributions continues de charges :

$$\begin{aligned} \text{distribution volumique : } \mathbf{E}_\Omega(\mathbf{r}) &= \int_\Omega \frac{\rho(\mathbf{R}) d\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}, \\ \text{distribution surfacique : } \mathbf{E}_\Sigma(\mathbf{r}) &= \int_\Sigma \frac{\sigma(\mathbf{R}) dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}, \\ \text{distribution linéique : } \mathbf{E}_\mathcal{L}(\mathbf{r}) &= \int_\mathcal{L} \frac{\lambda(\mathbf{R}) dx}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 3.5. Exemple du fil circulaire

La difficulté avec l'expression intégrale du champ électrique créé par une distribution continue provient de la somme vectorielle. Il faut donc soigneusement examiner les arguments de symétrie pour déterminer, avant tout calcul, la direction du champ total. Illustrons cette analyse par l'exemple du fil circulaire :



**Figure 2.12** Distribution linéique de charges sur un cercle d'axe  $z$ . Le vecteur unitaire perpendiculaire à l'axe est noté  $\mathbf{u}_\rho$ .

Le champ élémentaire est de la forme

$$d\mathbf{E}_{\text{cercle}} = \frac{dq(\mathbf{R})}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3},$$

il comporte une composante sur l'axe  $dE_z = d\mathbf{E}_{\text{cercle}} \cdot \mathbf{u}_z$  et une composante perpendiculaire  $dE_\rho = d\mathbf{E}_{\text{cercle}} \cdot \mathbf{u}_\rho$ . Un élément de longueur symétrique par rapport au centre du cercle produit un champ élémentaire dont la composante sur l'axe est identique alors qu'elle est opposée dans la direction perpendiculaire. L'ensemble du cercle peut être construit en associant deux à deux de tels éléments de longueur créant

<sup>(29)</sup> L'intégrale converge toujours cette fois, même si l'extension spatiale de la distribution est infinie.



des champs dont les composantes perpendiculaires se compensent toutes de sorte que  $\int_{\text{cercle}} d\mathbf{E}_{\text{cercle}} \cdot \mathbf{u}_\rho = 0$  et il reste un champ total au point  $z$ <sup>(30)</sup>

$$\mathbf{E}_{\text{cercle}}(z) = E_z(z)\mathbf{u}_z, \quad E_z(z) = \int_{\text{cercle}} d\mathbf{E}_{\text{cercle}} \cdot \mathbf{u}_z$$

avec

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0 d\theta}{2\pi r_0} Q \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_z}{r'^3}, \quad \mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_z = r' \cos \alpha.$$

Comme  $\alpha$  et  $r'$  sont constants lorsque l'on parcourt le périmètre du cercle, l'intégration est immédiate et conduit à

$$E_z(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{r_0 d\theta}{2\pi r_0} Q \frac{\cos \alpha}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \cos^3 \alpha$$

où l'on a utilisé  $r' = z/\cos \alpha$  pour exprimer le résultat en fonction de  $z$  et  $\alpha$  uniquement. On peut également écrire

$$E_z(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(r_0^2 + z^2)^{3/2}}.$$

On constate que le champ est nul en  $O$ , ce que l'on comprend car en ce point les composantes en  $z$  sont nulles et seules subsistent les composantes perpendiculaires dont la somme est effectivement nulle.

## 4. Théorème de Gauss

### 4.1. Énoncé et intérêt

Le théorème de Gauss donne une expression du flux du champ électrique  $\mathbf{E}_\Omega$  créé par une distribution arbitraire à travers une surface fermée  $\Sigma$  en fonction de la charge totale enfermée par la surface.

Soit  $\Phi_\Sigma(\mathbf{E}_\Omega)$  le flux en question. On a par définition

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}_\Omega) = \oint_\Sigma d\Phi(\mathbf{E}_\Omega), \quad d\Phi(\mathbf{E}_\Omega) = \mathbf{E}_\Omega \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.21)$$

Comme par ailleurs le champ est une somme de champs coulombiens (que l'on va choisir sous la forme de l'expression intégrale, mais la même démarche pourra être reproduite pour une distribution de charges discrètes),

$$d\mathbf{E}_{\text{coulombien}} = \frac{dq(\mathbf{R})}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}$$

on peut encore écrire

$$\mathbf{E}_\Omega = \int_\Omega d\mathbf{E}_{\text{coulombien}}, \quad \Phi_\Sigma(\mathbf{E}_\Omega) = \oint_\Sigma d\mathbf{S} \cdot \int_\Omega d\mathbf{E}_{\text{coulombien}}$$

<sup>(30)</sup> On pourrait appliquer les arguments de symétrie pour aboutir plus rapidement au même résultat : l'axe du cercle étant axe de symétrie de la distribution, le champ sur l'axe est de la forme indiquée.

ou, pour une distribution discrète,

$$\mathbf{E}_\Omega = \sum_{i \in \Omega} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{R}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}|}, \quad \Phi_\Sigma(\mathbf{E}_\Omega) = \oint_\Sigma d\mathbf{S} \cdot \sum_{i \in \Omega} \mathbf{E}_{\text{coulombien}},$$

c'est-à-dire que le flux du champ total se ramène dans tous les cas à une somme de flux de champs coulombiens pour lesquels on a déjà montré que le flux revient à un dénombrement de lignes de champ et vaut

$$\Phi_\Sigma(d\mathbf{E}_{\text{coulombien}}) = \frac{dq(\mathbf{R})}{\epsilon_0} \quad \text{si } dq(\mathbf{R}) \in \Sigma$$

$$\Phi_\Sigma(d\mathbf{E}_{\text{coulombien}}) = 0 \quad \text{si } dq(\mathbf{R}) \notin \Sigma$$

pour des distributions continues de charges et

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}_{\text{coulombien}}) = \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad \text{si } q_i \in \Sigma$$

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}_{\text{coulombien}}) = 0 \quad \text{si } q_i \notin \Sigma$$

pour des charges discrètes. L'intégrale sur le volume  $\Omega$  de la distribution donne alors une contribution égale à la charge totale  $Q_\Sigma$  enfermée dans la surface  $\Sigma$  :

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}_\Omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{dq(\mathbf{R}) \in \Sigma} dq(\mathbf{R}) = \frac{Q_\Sigma}{\epsilon_0} \quad (2.22)$$

ou encore

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}_\Omega) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{q_i \in \Sigma} q_i = \frac{Q_\Sigma}{\epsilon_0}. \quad (2.23)$$

Ce résultat est finalement évident lorsque l'on se souvient de l'expression du flux pour une charge ponctuelle. Chaque charge ponctuelle  $dq$  (ou  $q_i$  pour des charges discrètes) à l'intérieur de la surface fermée contribue avec un poids  $dq/\epsilon_0$ , et les charges extérieures à la surface ne contribuent pas car les lignes de champ qu'elles créent traversent deux fois (entrée et sortie) cette surface.

L'intérêt majeur du théorème de Gauss est de permettre le calcul du flux du champ électrique alors qu'on ignore la forme exacte de ce champ. Dans un problème à haute symétrie, on a en effet suffisamment de contraintes (liées à la symétrie et aux propriétés d'invariance) pour imposer une direction au champ et une dépendance du module du champ en fonction de certaines variables. Ces contraintes peuvent suffire au calcul du flux à travers une surface fermée elle-même choisie en fonction de la symétrie. Le choix de la surface est toujours tel que la quantité  $\oint_\Sigma \mathbf{E}_\Omega \cdot d\mathbf{S}$  soit facilement calculable comme vont le montrer les applications qui suivent.

### Remarque :

Cette propriété remarquable n'est valable qu'en raison de la forme particulière du champ coulombien (elle est donc vraie également pour le champ newtonien). Toute dépendance en  $1/r^{2+\epsilon}$  avec  $\epsilon$  infinitésimal changerait ce résultat. Expérimentalement, on sait que  $\epsilon < 5.8 \times 10^{-16}$ . Cela entraîne en théorie quantique que le photon a vraisemblablement une masse nulle  $m_\gamma < 4.10^{-51} \text{ kg}$  <sup>(31)</sup>.

<sup>(31)</sup> D. Sénéchal, <http://www.physique.usherb.ca/dsenech/>

## 4.2. Applications

### 4.2.1. Champ et potentiel à l'extérieur d'une distribution sphérique quelconque

On a déjà exprimé le potentiel coulombien à grande distance pour une distribution arbitraire chargée finie d'extension typique  $r_0$ , ce qui contraint la forme suivante à toute distance :

$$\phi_{\Omega}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} f_{\Omega}(r_0/r, \theta, \varphi), \text{ si } Q = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{R}) d\tau \neq 0.$$

De même pour les composantes du champ électrique, la forme mathématique à grande distance impose à toute distance la forme

$$E_{\Omega, x_i}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{E}_{\Omega} \cdot \mathbf{u}_{x_i} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} g_{\Omega, x_i}(r_0/r, \theta, \varphi).$$

Si la distribution de charges est sphérique (c'est-à-dire  $\rho(\mathbf{R}) = \rho(R)$  en choisissant l'origine au centre de la sphère), toute rotation d'angles  $\theta$  ou  $\varphi$  arbitraires autour du centre de la sphère laisse le problème physique inchangé. Les angles  $\theta$  et  $\varphi$  n'interviennent donc dans aucune expression physique. Les arguments de symétrie développés dans le cas de la spire circulaire permettent de même de montrer que le champ électrique est radial (c'est-à-dire porté par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_r$ ) :

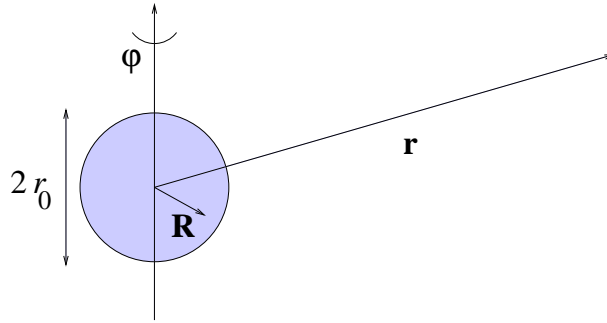


Figure 2.13 Distribution sphérique de charges.

$$\phi_{\Omega}(\mathbf{r}) = \phi_{\Omega}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} f_{\Omega}(r_0/r),$$

$$\mathbf{E}_{\Omega}(\mathbf{r}) = E_{\Omega}(r) \mathbf{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} g_{\Omega}(r_0/r) \mathbf{u}_r.$$

De la seconde relation, on déduit que le flux du champ électrique à travers une surface sphérique de rayon  $r$  centrée sur l'origine s'écrit<sup>(32)</sup>

$$\Phi_{\text{sphère}}(\mathbf{E}_{\Omega}) = E_{\Omega}(r) \oint_{\text{sphère}} dS = 4\pi r^2 E_{\Omega}(r),$$

<sup>(32)</sup> On met à profit ici d'une part la direction radiale du champ qui permet d'écrire pour un élément de surface sphérique  $d\mathbf{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \mathbf{u}_r$  que  $\mathbf{E}_{\Omega} \cdot d\mathbf{S} = E_{\Omega} dS$  et d'autre part le fait que le module du champ  $E_{\Omega}(r)$  ne dépend que de la distance  $r$  à l'origine, ce qui conduit à  $\oint_{\text{sphère}} \mathbf{E}_{\Omega} \cdot d\mathbf{S} = E_{\Omega}(r) r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2 E_{\Omega}(r)$ .

et du théorème de Gauss on déduit que si l'on se place à l'extérieur de la distribution ( $r > r_0$ ), on a simplement

$$4\pi r^2 E_\Omega(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{r_0} \rho(R) 4\pi R^2 dR = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

soit un champ de la forme

$$\mathbf{E}_\Omega(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r.$$

Le potentiel à l'extérieur en découle par intégration

$$\phi_\Omega(r) = - \int E_\Omega(r) dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

en choisissant la constante d'intégration nulle pour assurer que le potentiel s'annule à l'infini. Les fonctions  $f_\Omega(r_0/r)$  et  $g_\Omega(r_0/r)$  sont donc simplement égales à 1 à l'extérieur et le potentiel et le champ prennent la forme coulombienne correspondant à une charge ponctuelle  $Q$  placée à l'origine.

#### 4.2.2. Champ et potentiel à l'intérieur d'une distribution sphérique quelconque

Si l'on se place cette fois à l'intérieur d'une distribution chargée à symétrie sphérique, les arguments de symétrie et invariance évoqués précédemment restent valables. Le recours au théorème de Gauss exige une seule modification : si le flux du champ à travers une surface sphérique garde la forme  $4\pi r^2 E_\Omega(r)$ , l'intégrale de la charge est cette fois limitée à une sphère de rayon  $r < r_0$  et il vient

$$4\pi r^2 E_\Omega(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^{r < r_0} \rho(R) 4\pi R^2 dR,$$

$$\phi_\Omega(r) = - \int E_\Omega(r) dr.$$

La forme exacte dépend maintenant de la forme précise de la distribution de charges et les fonctions  $f_\Omega(r_0/r)$  et  $g_\Omega(r_0/r)$  en dépendent également.

#### 4.2.3. Sphères uniformément chargées

Dans le cas particulier classique de distributions de charges uniformes en volume ou en surface, les expressions obtenues à l'extérieur sont valables (et sont les mêmes dans les deux cas bien entendu), mais à l'intérieur, on procède comme suit :

- distribution de charges uniformes en volume  $\rho_0$  :  $4\pi r^2 E_{\rho_0}(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^3$  soit

$$E_{\rho_0}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{r_0^3}, \quad r \leq r_0,$$

$$E_{\rho_0}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad r \geq r_0,$$

Pour le potentiel on a  $\phi_{\rho_0}(r) = -\int E_{\rho_0}(r) dr = -\frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{r_0^3} + \text{constante}$ , où la constante est déterminée par la condition de continuité du potentiel à la surface de raccordement  $r_0$  :  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0} = \text{constante} - \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0}$ , d'où

$$\phi_{\rho_0}(r) = \frac{1}{2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left[ 3 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right], \quad r \leq r_0,$$

$$\phi_{\rho_0}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r \geq r_0.$$

• distribution de charges uniformes en surface  $\sigma_0$  :  $4\pi r^2 E_{\sigma_0}(r) = 0$  soit  $\phi_{\sigma_0}(r) = \text{constante}$ , où la constante est déterminée par la condition de continuité du potentiel :  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \text{constante}$ , d'où

$$E_{\sigma_0}(r) = 0, \quad \phi_{\sigma_0}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}, \quad r \leq r_0,$$

$$E_{\sigma_0}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \phi_{\sigma_0}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad r \geq r_0,$$

Les expressions sont données ici en fonction de la charge totale, mais elles peuvent également être exprimées en fonction des densités en substituant respectivement  $Q = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0$  ou  $Q = 4\pi r_0^2 \sigma_0$ .

On pourrait également calculer l'énergie électrostatique de la sphère chargée, par exemple pour le cas de la distribution surfacique :

$$U_{\text{sphère}} = \frac{1}{2} \int_{\text{sphère}} \sigma_0 \phi_{\sigma_0}(r_0) dS = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}.$$

#### 4.2.4. Cylindre chargé

On considère un cylindre de rayon  $a$ , de longueur infinie portant une densité volumique uniforme  $\rho_0$ . Soit  $Oz$  l'axe du cylindre, et soient  $r, \varphi, z$  les coordonnées cylindriques. La distribution est invariante par translation parallèlement à  $Oz$  et par rotation autour de  $Oz$  donc  $|\mathbf{E}_{\text{cylindre}}(r, \varphi, z)| \equiv E_{\text{cylindre}}(r)$ . Tout plan contenant  $Oz$ , ainsi que tout plan perpendiculaire est plan de symétrie. En un point  $M$  quelconque, le champ est donc porté par la droite joignant perpendiculairement  $M$  à l'axe  $Oz$ , soit  $\mathbf{E}_{\text{cylindre}}(\mathbf{r}) \equiv E_{\text{cylindre}}(r) \mathbf{u}_r$ . Ce résultat est valable en tout point de l'espace.

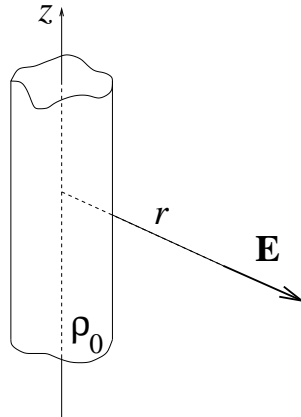


Figure 2.14 Distribution cylindrique de charges.

Il suffit de chercher une surface de Gauss adaptée. Le flux  $\Phi_{\Sigma}(E_{\text{cylindre}}(r)\mathbf{u}_r) = \oint_{\Sigma} E_{\text{cylindre}}(r)\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{S}$  s'évalue simplement dans deux cas :

- soit  $d\mathbf{S} \perp \mathbf{u}_r$  auquel cas la contribution de  $d\mathbf{S}$  au flux total est nulle,
- soit  $d\mathbf{S} = dS\mathbf{u}_r$  auquel cas  $E_{\text{cylindre}}(r)\mathbf{u}_r$  est constant en module sur  $d\mathbf{S}$  et en tout point perpendiculaire à l'élément de surface (le produit scalaire devient un simple produit algébrique).

Cette dernière situation se produit si l'on considère pour  $\Sigma$  la surface latérale  $\Sigma_{\text{lat.}}$  d'un cylindre de rayon  $r$  d'axe  $Oz$  et de hauteur  $h$ . Pour fermer  $\Sigma$ , on utilise deux disques  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  de rayon  $r$  perpendiculaires à  $Oz$ .

$$\int_{\Sigma_1} E_{\text{cylindre}}(r)\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{\Sigma_2} E_{\text{cylindre}}(r)\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{S}_2 = 0,$$

$$\int_{\Sigma_{\text{lat.}}} E_{\text{cylindre}}(r)\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{S}_{\text{lat.}} = 2\pi r h E_{\text{cylindre}}(r).$$

L'évaluation de la charge contenue dans  $\Sigma$  donne  $\rho_0\pi a^2 h$  si  $r > a$  et  $\rho_0\pi r^2 h$  si  $r < a$ . On en déduit<sup>(33)</sup>

$$E_{\text{cylindre}}(r) = \begin{cases} \rho_0 a^2 / 2\varepsilon_0 r & \text{si } r > a \\ \rho_0 r / 2\varepsilon_0 & \text{si } r < a \end{cases}$$

Le potentiel se déduit d'une intégration :  $E(r) = -\frac{\partial\phi}{\partial r}$  ou  $\phi(r) = -\int E(r)dr$  en imposant également la continuité du potentiel en  $r = a$ .

#### 4.2.5. Limites à l'utilisation du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss est bien entendu toujours vrai. Cependant il n'est pas utilisable dans toutes les situations. Si l'on ne dispose d'aucun argument de symétrie, il est impossible de savoir à l'avance quelle va être la forme du champ et il est donc exclu d'en calculer le flux à travers une surface donnée. De manière générale, lorsque l'on ne sait faire appel à des raisonnements de symétrie qu'en un nombre limité de points de l'espace (par exemple dans le cas d'une charge répartie uniformément sur un disque, on peut montrer qu'en un point de l'axe le champ est porté par l'axe du disque, mais on ne sait pas en dire grand chose en dehors de cet axe) on ne peut pas généraliser suffisamment pour trouver une surface fermée permettant un calcul de flux.

### 4.3. Atome d'hydrogène

L'atome d'hydrogène dans son état fondamental est représenté par :

- le proton (constituant le noyau) assimilé à une charge ponctuelle  $+|q_e|$  à l'origine  $O$  du repère  $(r, \theta, \varphi)$ , et produisant un potentiel purement coulombien  $\phi_n(r)$ ,
- une densité de charge électronique  $\rho_e(r) = Ce^{-2r/a_0}$ ,  $a_0 = 0.529 \text{ \AA}$ .

La constante  $C$  est déterminée en assurant la neutralité électrique<sup>(34)</sup> :

$$-|q_e| = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 dr \rho_e(r) = \pi a_0^3 C,$$

<sup>(33)</sup> On ne peut pas exprimer le champ en fonction de la charge totale du cylindre car celle-ci diverge. On utilise donc la densité volumique de charges  $\rho_0$ .

<sup>(34)</sup> L'intégrale se calcule par intégration par parties. On obtient la fonction  $\Gamma$  d'Euler définie par

$$\Gamma(n+1) \equiv \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = n\Gamma(n)$$

avec  $\Gamma(1) = 1$ , soit  $\Gamma(n+1) = n!$  si  $n$  est entier.

ce qui impose la valeur  $C = -|q_e|/\pi a_0^3$ .

Pour calculer le champ électrique créé par l'atome, on utilise le théorème de Gauss. La charge totale contenue à l'intérieur d'une sphère  $\Sigma$  de rayon  $r$  (centrée sur l'origine) vaut

$$Q_\Sigma = |q_e| + Q_e(r) = |q_e| + \int_0^r 4\pi r'^2 dr' \rho_e(r')$$

où  $Q_e(r)$  est la contribution du nuage électronique et  $|q_e|$  celle du noyau. L'intégrale conduit à<sup>(35)</sup> :

$$Q_\Sigma = |q_e| \left( 2\frac{r^2}{a_0^2} + 2\frac{r}{a_0} + 1 \right) e^{-2r/a_0}.$$

On peut noter que

$$P_e(r) = 4\pi r^2 \rho_e(r) = -\frac{4|q_e|}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0} = \frac{dQ_e}{dr}$$

représente la charge électronique comprise entre les sphères de rayons  $r$  et  $r + dr$ . Elle présente un minimum en  $a_0$  qui donne la distance de plus forte probabilité de présence de l'électron. Le flux du champ électrique<sup>(36)</sup> à travers  $\Sigma$ ,  $4\pi r^2 E(r)$ , conduit, à l'aide du théorème de Gauss, à l'expression

$$E(r) = \frac{|q_e|}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a_0^2} + \frac{1}{a_0 r} + \frac{1}{2r^2} \right) e^{-2r/a_0}$$

et le potentiel correspondant s'obtient par intégration<sup>(37)</sup>

$$\phi(r) = \frac{|q_e|}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a_0} + \frac{1}{r} \right) e^{-2r/a_0}.$$

L'énergie de liaison de l'atome d'hydrogène est déterminée en évaluant le travail nécessaire pour extraire du potentiel  $\phi_n(r)$  créé par le noyau seul un électron de charge  $-|q_e|$  et l'emmener de la distance  $r = a_0$  à l'infini. Cette énergie de liaison vaut alors

$$W_H = \int_{a_0}^{\infty} \mathbf{F}_{n \rightarrow e} dr \mathbf{u}_r = -|q_e| \int_{a_0}^{\infty} \mathbf{E}_n dr \mathbf{u}_r = +|q_e| \int_{a_0}^{\infty} d\phi_n = -|q_e| \phi_n(a_0).$$

On obtient la valeur numérique  $W_H = -27.2$  eV ( $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ). Ce résultat est le double de la valeur exacte obtenue en mécanique quantique, car on n'a pas tenu compte ici de l'énergie cinétique (positive) de l'électron.

<sup>(35)</sup> On établit facilement par intégration par parties la relation

$$\Gamma_a(n+1) \equiv \int_0^a t^n e^{-t} dt = [-t^n e^{-t}]_0^a + n \int_0^a t^{n-1} e^{-t} dt = n\Gamma_a(n) - a^n e^{-a}$$

et  $\Gamma_a(1) = 1 - e^{-a}$ .

<sup>(36)</sup> La distribution de charge est sphérique, le champ est donc radial,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{u}_r$ .

<sup>(37)</sup> On cherche pour cela une solution de la forme  $(a + b/r)e^{-2r/a_0}$ .

#### 4.4. Conséquences : première équation de Maxwell et équation de Poisson

De l'expression intégrale du théorème de Gauss on déduit une loi locale, la première équation de Maxwell.

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\Omega(\Sigma)} \rho(\mathbf{R}) d\tau$$

soit

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} d\mathbf{S} \equiv \int_{\Omega(\Sigma)} \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau = \int_{\Omega(\Sigma)} \rho(\mathbf{R}) d\tau.$$

Comme cette propriété (théorème d'Ostrogradsky) est vraie pour toute surface, elle l'est également pour tout volume et l'on en déduit l'équation de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}. \quad (2.24)$$

C'est une équation locale qui permet de déduire le champ en un point de l'expression de la densité de charge en ce point.

On a par ailleurs  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  soit  $-\operatorname{div} \nabla\phi(\mathbf{r}) = -\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$ . L'équation

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (2.25)$$

est l'équation de Poisson, c'est aussi une forme locale. Dans une région vide de charge, on obtient l'équation de Laplace

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.26)$$

Cette équation est extrêmement importante pour l'étude des distributions de charges dans le vide ou en présence de milieux conducteurs.

##### Remarques :

i) Calcul du laplacien à l'aide du théorème de Gauss. Exprimons la partie radiale de l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques. Soit  $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{u}_r$  un champ de vecteurs radial que l'on suppose dériver d'un champ scalaire  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , soit encore  $E(r) = -\frac{\partial\phi}{\partial r}$ . Comme  $d\Phi_{\text{dS}} = \mathbf{E}d\mathbf{S} = \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau$ , le flux entrant par la face perpendiculaire à  $\mathbf{u}_r$  au point  $r, \theta, \varphi$  s'écrit  $-E(r) \times r d\theta \times r \sin\theta d\varphi$  et le flux sortant par la surface élémentaire analogue en  $r+dr$  vaut  $E(r+dr) \times (r+dr) d\theta \times (r+dr) \sin\theta d\varphi$ . Le flux à travers le cube élémentaire fait intervenir ces deux seules contributions et s'écrit  $d\Phi_{\text{d}\tau} = \frac{\partial}{\partial r}(E(r)r^2 \sin\theta d\theta d\varphi) dr$ . On en déduit  $\operatorname{div} E(r)\mathbf{u}_r d\tau = \operatorname{div} E(r)\mathbf{u}_r \times r^2 \sin\theta d\theta d\varphi dr$  soit

$$\operatorname{div} E(r)\mathbf{u}_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 E(r)), \quad \Delta\phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right). \quad (2.27)$$

ii) Distribution de Dirac et charge ponctuelle. On sait que pour une charge ponctuelle, la solution générale pour le potentiel s'écrit  $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{R}) d\tau}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ . Le problème se pose de savoir écrire la densité volumique pour la charge ponctuelle. L'équation de Poisson conduit à une impasse car

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \right) = 0.$$



La difficulté provient de ce que  $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$  au sens habituel des fonctions. On lève cette ambiguïté au moyen de la distribution de Dirac. Calculons  $I = \int_{\Omega} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) d\tau$  sur un volume  $\Omega$ .

$$I = \int_{\Omega} \operatorname{div} \nabla \left( \frac{1}{r} \right) d\tau = \oint_{\Sigma(\Omega)} \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{S}.$$

Avec  $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) \mathbf{u}_r = -\frac{\mathbf{u}_r}{r^2}$  on obtient

$$I = - \oint_{\Sigma(\Omega)} \frac{d\mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_r}{r^2} = - \oint_{\Sigma(\Omega)} d\Omega = -4\pi.$$

On constate ainsi que  $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$  est nul au sens des fonctions mais que son intégrale sur un volume enfermant l'origine est une constante non nulle égale à  $-4\pi$ . Cette propriété troublante permet de poser

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad \text{où} \quad \int_{\Omega} \delta(\mathbf{r}) d\tau = 1. \quad (2.28)$$

Dans ces conditions, l'équation de Poisson permet de donner une forme explicite à la densité de charge associée à une charge ponctuelle :

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{\epsilon_0} q\delta(\mathbf{r}). \quad (2.29)$$

## 4.5. Discontinuité de $\mathbf{E}$ à travers une surface chargée

### 4.5.1. Relations de passage

Le potentiel est une fonction continue en toute circonstance. Il tend vers zéro à l'infini lorsque les distributions de charges sont limitées. L'application du théorème de Gauss à un élément de volume infinitésimal coupé par une nappe portant une densité surfacique de charges  $\sigma(\mathbf{R})$  permet d'établir que la composante normale du champ est discontinue :

$$[\mathbf{E}(M_2) - \mathbf{E}(M_1)] \cdot \mathbf{n}_{12} = \frac{\sigma(\mathbf{R})}{\epsilon_0}$$

où  $M_1$  et  $M_2$  sont de part et d'autre de la surface et  $\mathbf{n}_{12}$  est le vecteur unitaire normal à cette surface orienté de  $M_1$  vers  $M_2$ . L'utilisation de  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$  entraîne de même la continuité des composantes tangentielles :

$$[\mathbf{E}(M_2) - \mathbf{E}(M_1)] \cdot \mathbf{t} = 0.$$

#### 4.5.2. Champ au voisinage d'un conducteur et pression électrostatique

Dans un conducteur à l'équilibre, le champ électrostatique est nul. Comme il existe des charges libres, l'application d'un champ extérieur provoque un déplacement de ces charges vers les surfaces du conducteur, il apparaît ainsi un champ induit par la distribution surfacique qui compense partiellement le champ externe. Lorsque l'équilibre est atteint, en un temps de relaxation extrêmement bref, le champ induit compense exactement le champ appliqué de sorte qu'il ne s'exerce plus aucune force sur les charges libres en volume. Un conducteur à l'équilibre peut donc être assimilé à une densité surfacique de charges  $\sigma(M)$  ( $M$  est un point quelconque de la surface). Le champ total étant nul à l'intérieur et la composante tangentielle du champ étant continue, le champ à l'extérieur au voisinage de la surface conductrice est purement normal. La discontinuité de la composante normale valant  $\sigma(M)/\epsilon_0$ , on en déduit qu'au voisinage extérieur du point  $M$ , le champ vaut  $\frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}\mathbf{n}$ . Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Coulomb.

#### Remarques :

i) La surface d'un conducteur chargé à l'équilibre portant une densité surfacique, il s'exerce en tout point de celle-ci une force répulsive qui tend à faire éclater le conducteur, et décrite par une pression électrostatique  $d\mathbf{F} = p d\mathbf{S}$  <sup>(38)</sup>. On exprime  $p$  en calculant la force s'exerçant sur l'élément de surface  $d\mathbf{S}$  portant la charge  $dq(M) = \sigma(M) dS$  du fait du reste du conducteur. Le champ créé en  $M$  par le reste du conducteur, en l'absence de cet élément de surface  $d\mathbf{S}$ , s'évalue au moyen du théorème de superposition et vaut  $\frac{\sigma(M)}{2\epsilon_0}\mathbf{n}$ , d'où la force

$$d\mathbf{F} = \sigma(M) dS \frac{\sigma(M)}{2\epsilon_0} \mathbf{n} = \frac{\sigma^2(M)}{2\epsilon_0} d\mathbf{S}.$$

La pression électrostatique vaut par conséquent  $p = \frac{\sigma^2(M)}{2\epsilon_0}$ .

ii) Effet de pointe : considérons un conducteur sphérique isolé, porté au potentiel  $V$ . La charge totale portée par le conducteur vaut  $Q = 4\pi\epsilon_0 R V$  et le champ au voisinage externe  $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/4\pi\epsilon_0 R^2 = V/R$ . La densité de charges et le champ sont d'autant plus importants que le rayon de courbure de la sphère est petit. En particulier, au voisinage d'une pointe, le champ électrique est extrêmement intense.

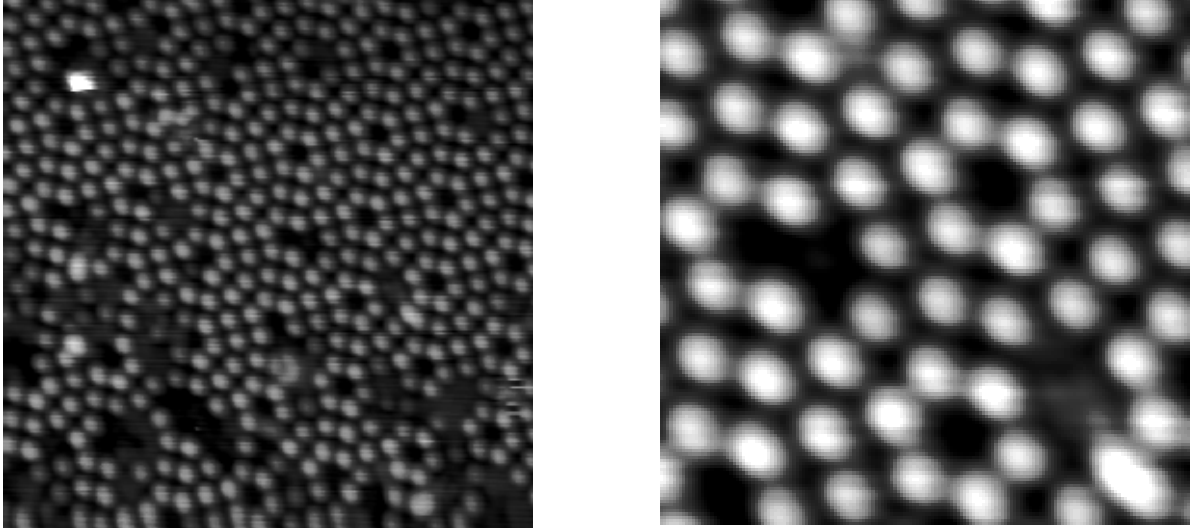
iii) Microscope ionique : le microscope ionique permet d'obtenir des images agrandies de la disposition des atomes au niveau d'une pointe métallique. Il est constitué d'une enceinte sphérique de rayon  $R$  au milieu de laquelle se trouve une pointe conductrice dont on note  $r$  le rayon de courbure minimum. On applique une différence de potentiel entre les deux éléments, ce qui produit un champ très intense au voisinage de la pointe dans une symétrie à peu près radiale. Ce champ est suffisant pour permettre l'ionisation d'atomes de la vapeur contenue dans l'enceinte (généralement de l'hélium). Une fois ionisés, ces atomes soumis au champ se précipitent vers la surface interne de l'enceinte, portée à un potentiel négatif et couverte d'un film sensible sur lequel apparaît une image agrandie dans un rapport  $R/r$  de la topographie de la pointe.

iv) Microsonde de Castaing : le fonctionnement est inverse par rapport à l'émission de champ. La surface de l'échantillon taillé en forme de pointe est bombardée par des électrons qui provoquent des transitions atomiques. Par désexcitation, l'échantillon émet un rayonnement X qui, par analyse, permet de remonter à la composition chimique du matériau sondé.

v) Sonde atomique tomographique : le fonctionnement est analogue à celui du microscope ionique, mais cette fois l'expérience est réalisée dans une enceinte à vide et le champ est assez intense pour arracher des atomes de la surface de la pointe. Couplé à un spectromètre de masse, ce dispositif permet une analyse fine de la nature et des profils de densité de chaque espèce chimique constituant la pointe.

<sup>(38)</sup> Cette force est bien entendu compensée par les forces de cohésion du solide.

vi) Microscope à effet tunnel : l'ingrédient de base est cette fois l'existence d'un courant tunnel qui peut passer entre la surface métallique d'un matériau et une pointe qui balaie l'échantillon. Ce courant décroît extrêmement rapidement si la distance pointe-surface augmente. Si l'on impose à la pointe de se déplacer latéralement et verticalement en maintenant un courant tunnel constant, l'enregistrement des mouvements de la pointe restitue la topographie de la surface (ici la surface du silicium, dite reconstruite  $7 \times 7$ , présentée à deux échelles différentes).



**Figure 2.15** Surface du silicium en résolution atomique obtenue par microscopie en champ proche.

## 5. Energie électrostatique

### 5.1. Energie potentielle d'une charge $q$ dans le champ créé par un système de charges

On considère un système électrostatique d'extension spatiale limitée  $\mathcal{S}$  créant un champ  $\mathbf{E}_{\mathcal{S}}(\mathbf{r})$  en tout point de l'espace. Le travail à fournir pour amener une charge ponctuelle  $q$  de l'infini au point  $\mathbf{r}$ , égal à l'opposé de la variation d'énergie potentielle  $-\Delta\mathcal{U}_{\infty,\mathbf{r}}$ , vaut

$$-\Delta\mathcal{U}_{\infty,\mathbf{r}} = W = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} q\mathbf{E}_{\mathcal{S}} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \nabla\phi_{\mathcal{S}} \cdot d\mathbf{l} = -q\phi_{\mathcal{S}}(\mathbf{r}).$$

On en déduit l'énergie potentielle de la charge  $q$  au point  $\mathbf{r}$  en présence d'un système de charges quelconque  $\mathcal{S}$  :

$$\mathcal{U}(q) = q\phi_{\mathcal{S}}(\mathbf{r}). \quad (2.30)$$

Cette énergie électrostatique est indépendante du chemin suivi pour arriver au point  $\mathbf{r}$ . On a ainsi redémontré par des arguments de mécanique un résultat que nous avons posé comme définition du potentiel électrostatique.

**Remarque :**

On peut en déduire l'énergie potentielle d'un dipôle  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$  dans un champ extérieur  $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  : les charges  $+q$  et  $-q$  étant placées aux points  $A$  et  $B$ , on a

$$\mathcal{U}(\mathbf{p}) = q[\phi_{\text{ext}}(A) - \phi_{\text{ext}}(B)].$$

Si l'on note  $\mathbf{l} = \overrightarrow{BA}$ , on a  $\phi_{\text{ext}}(A) = \phi_{\text{ext}}(O) + \frac{1}{2}\mathbf{l}(\nabla\phi_{\text{ext}})_O$  et  $\phi_{\text{ext}}(B) = \phi_{\text{ext}}(O) - \frac{1}{2}\mathbf{l}(\nabla\phi_{\text{ext}})_O$  d'où l'on déduit

$$\mathcal{U}(\mathbf{p}) = -q\mathbf{l}[-(\nabla\phi_{\text{ext}})_O] = -\mathbf{p}\mathbf{E}_{\text{ext}}. \quad (2.31)$$

**5.2. Energie électrostatique d'un système de charges ponctuelles**

Soient deux charges isolées  $q_1$  et  $q_2$  distantes de  $r_{12}$ . L'énergie nécessaire pour apporter la première charge  $q_1$  de l'infini au point 1, dans un univers vide, est nulle, mais la seconde,  $q_2$  placée dans le champ créé par la première au point 2, a une énergie potentielle  $q_2\phi_1(2)$  <sup>(39)</sup>. Le problème étant symétrique, on a

$$\mathcal{U}_{12} = q_2\phi_1(2) = q_1\phi_2(1) = \frac{1}{2}(q_2\phi_1(2) + q_1\phi_2(1)),$$

où  $\phi_j(i)$  est le potentiel créé par la charge  $j$  au point où se trouve la charge  $i$ . Pour un ensemble  $\mathcal{S}$  de charges discrètes, on aura donc

$$\mathcal{U}_{\mathcal{S}} = \sum_{\text{paires}} \mathcal{U}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_j^{i \notin \mathcal{S}}(i) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}, \quad (2.32)$$

où  $\phi_j^{i \notin \mathcal{S}}(i) = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$  est le potentiel dû à toutes les charges à l'exclusion de la charge  $i$  elle-même.

**5.3. Systèmes de charges réparties**

On généralise l'expression précédente au cas des distributions continues de charges dans un volume  $\Omega$  :

$$\frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \longleftrightarrow \frac{\rho(\mathbf{R}) d\tau}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad \text{soit} \quad \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \longleftrightarrow \int_{i \notin \Omega} \frac{\rho(\mathbf{R}) d\tau}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \phi_{i \notin \Omega}(\mathbf{r}_i),$$

où  $\phi_{i \notin \Omega}(\mathbf{r}_i)$  est à nouveau le potentiel dû à la distribution dont on retranche le voisinage du point  $\mathbf{r}_i$ . On peut imaginer pour cela que l'on fait un trou de taille  $a$  centré sur  $\mathbf{r}_i$  dans la distribution et que l'on exclut donc la charge  $4\pi a^2 da \rho(\mathbf{r}_i) \rightarrow 0$  quand  $a \rightarrow 0$ . La contribution de cette charge disparaît pour une distribution continue et l'on a simplement <sup>(40)</sup>

$$\int_{i \notin \Omega} \frac{\rho(\mathbf{R}) d\tau}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{R}) d\tau}{4\pi\epsilon_0 r_i} = \phi_{\Omega}(\mathbf{r}_i).$$

<sup>(39)</sup> On ne prend pas en compte l'énergie infinie de création des charges ponctuelles. Cette énergie infinie peut être évaluée en prenant la limite  $a \rightarrow 0$  d'une distribution arbitraire (volumique ou surfacique) d'extension spatiale limitée par  $a$ , ce qui donne  $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \rightarrow \infty$ .

<sup>(40)</sup> Si le système  $\Omega$  est constitué d'une distribution continue et d'une charge ponctuelle :  $\rho(\mathbf{r}) = \rho_{\text{cont.}}(\mathbf{r}) + q_i\delta(\mathbf{r}_i)$ , on obtient pour l'énergie une contribution infinie provenant de la charge discrète, puisque  $\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r})\phi_{\Omega}(\mathbf{r}) d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{\text{cont.}}(\mathbf{r})\phi_{\Omega}(\mathbf{r}) d\tau + q_i\phi_{\Omega}(\mathbf{r}_i)$ , avec  $\phi_{\Omega}(\mathbf{r}) = \phi_{\text{cont.}}(\mathbf{r}) + \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \rightarrow \infty$  lorsque  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_i$ .

Il vient finalement

$$\frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_j(i) = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \longrightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(1) d\tau(1) \int_{\Omega} \frac{\rho(2) d\tau(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}},$$

soit

$$\mathcal{U}_{\Omega} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{R}) \phi_{\Omega}(\mathbf{R}) d\tau. \quad (2.33)$$

Cette expression peut s'écrire en fonction d'une intégrale de la densité d'énergie étendue à tout l'espace :

$$\mathcal{U}_{\Omega} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{R}) \phi_{\Omega}(\mathbf{R}) d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon_0 \phi_{\Omega}(\mathbf{R}) \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau.$$

En utilisant le théorème de la divergence, il vient

$$\mathcal{U}_{\Omega} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \oint_{\Sigma(\Omega)} \phi_{\Omega}(\mathbf{r}) \mathbf{E} d\mathbf{S} - \int_{\Omega} \mathbf{E} \nabla \phi_{\Omega} d\tau.$$

L'intégrale de départ peut être étendue à l'espace infini, puisque la densité de charges  $\rho(\mathbf{R})$  est nulle en dehors de  $\Omega$ . Dans ces conditions, si le volume chargé  $\Omega$  est limité dans l'espace, le potentiel et le champ à grande distance varient respectivement en  $1/r$  et  $1/r^2$ , de sorte que la contribution de l'intégrale de surface se comporte en  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^3} r^2 = 0$  et il reste finalement

$$\mathcal{U}_{\Omega} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\infty} E^2 d\tau \quad (2.34)$$

où  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  représente la densité d'énergie électrostatique <sup>(41)</sup> .

### Remarque :

Energie de construction d'un système de charges continues : supposons déjà construite une sphère  $\Omega(r)$  de rayon  $r$  portant une charge uniformément répartie en volume avec une densité  $\rho$ . Pour en augmenter le rayon de  $dr$ , il faut apporter de l'infini une charge élémentaire  $dq = 4\pi r^2 dr$ , ce qui coûte l'énergie  $d\mathcal{U}_{\Omega(r)} = - \int_{\infty}^r dq \mathbf{E}_{>}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = dq \phi_{>}(r)$  où  $\phi_{>}(r) = \rho r^2 / 3\epsilon_0$  est le potentiel qui règne à la surface de la sphère  $\Omega(r)$ . L'énergie nécessaire à la construction d'une sphère de rayon  $R$  s'écrit ainsi

$$\mathcal{U}_{\Omega} = \int_0^R d\mathcal{U}_{\Omega(r)} = 4\pi\rho \int_0^R r^2 \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} dr = \frac{4}{15} \frac{\pi\rho^2 R^5}{\epsilon_0}.$$

<sup>(41)</sup> Il est clair que cette expression n'est pas valable si la distribution comporte des charges ponctuelles. Elle a en effet été déduite de l'expression intégrale en fonction du potentiel, qui elle-même n'est pas valable dans ce cas. On peut s'en convaincre aisément en notant que l'énergie de deux charges discrètes opposées,  $-q^2/4\pi\epsilon_0 r$ , est négative alors que la densité d'énergie est toujours positive.

## 5.4. Ordres de grandeur en physique atomique et en astrophysique

L'énergie électrostatique (coulombienne) intervient à l'échelle microscopique (structure des atomes), mais également à l'échelle des planètes où elle compense l'énergie gravitationnelle. Sans autre forme d'énergie, la gravitation seule provoquerait l'effondrement de tout corps sur lui-même.

• **Physique atomique** : Il suffit de minimiser l'énergie totale  $E = p^2/2m - e^2/r$ , en utilisant également l'ordre de grandeur  $p \sim \hbar/r$  pour obtenir le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène  $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \text{ \AA}$  et l'énergie de l'état fondamental  $E_0 = E(a_0) = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13.6 \text{ eV}$ .

Pour un atome à  $Z$  électrons, le problème se complique à cause des interactions entre électrons. Pour un niveau de cœur, on peut supposer que l'électron le plus interne interagit avec le noyau chargé  $Z$  fois :  $-Ze^2/r$ , et que les  $Z-1$  autres électrons sont plus éloignés de sorte que leur influence sur l'électron interne est nulle (théorème de Gauss). Cela revient à changer  $e^2$  en  $Ze^2$  dans les résultats relatifs à l'hydrogène, soit  $a'_0 = a_0/Z$  la taille d'une orbitale interne et  $E'_0 = Z^2 E_0$  l'énergie de l'électron correspondant. Pour  $Z \simeq 50$  on trouve  $E'_0 \simeq -34 \text{ keV}$ . Ce sont en particulier les transitions entre niveaux de cœur qui produisent les spectres de raies X. Pour une longueur d'onde de  $\lambda \simeq 1 \text{ \AA}$ , il faut en effet une transition d'énergie  $\Delta E = hc/\lambda \simeq 12 \text{ keV}$ .

L'énergie d'ionisation, nécessaire pour arracher l'électron le moins lié à l'atome, peut être évaluée dans l'approximation inverse qui suppose que les  $Z-1$  autres électrons, plus internes, écrantent partiellement le noyau. Dans l'hypothèse d'un écrantage total, ce dernier électron ne voit qu'une seule charge résultante et les résultats de l'hydrogène s'appliquent sans modification. On en déduit que tous les atomes ont une taille de l'ordre de l'Å et que les énergies de première ionisation sont toutes de l'ordre de la dizaine d'eV. Dans les faits, cette approximation est raisonnable pour les alcalins et sous-estime les énergies d'ionisation des gaz rares, mais l'ordre de grandeur est correct.

Le calcul de l'état fondamental d'un atome à  $Z$  électrons nécessite la prise en compte des répulsions entre électrons et comprend la somme des énergies de tous les électrons de l'atome :

$$E_Z(R) = \sum_{i=1}^Z \frac{p_i^2}{2m} - \sum_{i=1}^Z \frac{Ze^2}{r_i} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^Z \frac{e^2}{r_{ij}}$$

En remplaçant chaque terme par sa moyenne, il vient

$$E_Z(R) \simeq \frac{Z\langle p_i^2 \rangle}{2m} - Z^2 e^2 \langle r_i^{-1} \rangle + \frac{1}{2} Z(Z-1) e^2 \langle r_{ij}^{-1} \rangle.$$

En supposant de plus que  $Z \gg 1$  et en ne considérant que des résultats dimensionnels <sup>(42)</sup>, les deux derniers termes se regroupent :

$$E_Z(R) = \frac{Z\langle p_i^2 \rangle}{2m} - \frac{1}{2} Z^2 e^2 \langle r_i^{-1} \rangle.$$

<sup>(42)</sup> La distance moyenne entre particules est de l'ordre de la taille de l'atome  $R$ . En effet, pour une distribution d'électrons uniforme dans l'atome,  $n(r) \sim \Omega^{-1}$  où  $\Omega = \frac{4}{3}\pi R^3$ , on aurait

$$\langle r_i^{-1} \rangle = \int_0^R r^{-1} n(r) 4\pi r^2 dr = \frac{3}{2R}.$$

L'application des inégalités de Heisenberg doit être assortie du principe de Pauli, puisque les électrons sont des fermions et ne peuvent pas occuper à plusieurs un même état quantique. Si les  $Z$  électrons se partagent un volume de taille caractéristique  $R$ , chaque électron dispose d'un volume de taille caractéristique  $R/Z^{1/3}$ , ce qui augmente considérablement sa quantité de mouvement  $\langle p_i \rangle \sim \hbar/RZ^{-1/3}$ . L'énergie totale de l'atome est donc de la forme

$$E_Z(R) = \frac{\hbar^2 Z^{5/3}}{2mR^2} - \frac{Z^2 e^2}{2R}.$$

Elle présente un minimum en  $R_0 \simeq 2a_0 Z^{-1/3}$  et l'énergie de l'état fondamental à  $Z$  électrons est de l'ordre de

$$E_Z(R_0) \simeq -\frac{1}{8} \frac{me^4}{\hbar^2} Z^{7/3} = -\frac{1}{4} Z^{7/3} \text{ Ry}.$$

Pour  $Z \simeq 50$ , on obtient  $E_{50}(R_0) \simeq -31 \text{ keV}$ .

• **Astrophysique** : Les gros objets célestes qui ne rayonnent pas (planètes, naines blanches, étoiles à neutrons) peuvent être assimilés à des systèmes quantiques dans leur état fondamental, pour lesquels l'équilibre interaction gravitationnelle-interaction coulombienne conduit à une forme sphérique. On exclut de cette discussion les corps de petite dimension, comme les météorites, pour lesquels l'équilibre entre forces gravitationnelle et électrostatique n'est pas réalisé, de même que les étoiles de la séquence principale, comme le soleil, qui manifestement rayonne et n'est donc pas dans l'état fondamental. Une planète est assimilée à un corps sphérique de taille caractéristique  $R$ , comportant  $N$  atomes de masse atomique  $A$ . La masse totale est  $M_P \simeq NAm_p$  où  $m_p$  est la masse du proton, voisine de celle du neutron. Les atomes sont supposés ionisés une fois, l'ensemble constituant une structure de type métallique<sup>(43)</sup> et l'énergie électrostatique est donnée par  $E_Q = -N \frac{m_e e^4}{2\hbar^2}$  où  $m_e$  est la masse de l'électron. La neutralité électrique locale (sans laquelle la gravitation ne dominerait pas à grande distance) impose que la distribution spatiale des noyaux soit identique à celle des électrons. Quel que soit le spin des noyaux, ceux-ci sont ainsi soumis, par l'intermédiaire des électrons, au principe de Pauli pris en compte au moyen de l'expression de Heisenberg :  $p \sim \hbar/RN^{-1/3}$ . La somme des énergies cinétique et gravitationnelle des constituants de la planète s'écrit

$$E_N(R) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_e} + \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2Am_p} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{Gm_e^2}{r_{ij}} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{G(Am_p)^2}{r_{ij}} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{Gm_e Am_p}{r_{ij}}.$$

L'énergie cinétique est dominée par le terme électronique alors que l'énergie gravitationnelle est essentiellement due au terme noyaux-noyaux, de sorte que seuls deux termes subsistent :

$$E_N(R) \simeq N \frac{\langle (p_i^e)^2 \rangle}{2m_e} - \frac{1}{2} G(Am_p)^2 \langle r_{ij}^{-1} \rangle.$$

En remplaçant les distances moyennes entre particules par  $R$ , il vient

$$E_N(R) \simeq \frac{\hbar^2 N^{5/3}}{2m_e R^2} - \frac{1}{2} \frac{GN^2(Am_p)^2}{R}$$

<sup>(43)</sup> Dans un métal, les ions occupent les nœuds d'un réseau cristallin et les électrons libérés sont délocalisés sur l'ensemble de la structure. On les appelle électrons libres car ils sont responsables du mécanisme de conductivité électrique. Ce sont par ailleurs ces charges libres qui assurent l'écrantage d'un champ extérieur à l'équilibre.

qui présente un minimum en

$$R_0 = \frac{2\hbar^2}{G(Am_p)^2 m_e} N^{-1/3}$$

auquel correspond l'énergie gravitationnelle

$$E_N(R_0) \simeq -\frac{1}{8} \frac{G^2 (Am_p)^4 m_e}{\hbar^2} N^{7/3}.$$

Le nombre de noyaux constituant la planète s'obtient en égalant ce terme à l'énergie coulombienne  $E_Q$  :

$$N_0 = \left( \frac{2e^2}{G(Am_p)^2} \right)^{3/2},$$

d'où l'on déduit la masse et le rayon de la planète en fonction du seul nombre de masse  $A$  :

$$M_P = \left( \frac{2e^2}{G} \right)^{3/2} m_p^{-2} A^{-2} = M^* A^{-2},$$

$$R_P = \frac{\sqrt{2}\hbar^2}{\sqrt{G}m_p m_e} A^{-1} = R^* A^{-1}.$$

L'application numérique conduit à  $M^* \simeq 6.5 \times 10^{27}$  kg et  $R^* \simeq 7.5 \times 10^7$  m. Pour des planètes telluriques constituées essentiellement de Fe et Si,  $A \simeq 50$  conduit à  $M_P \simeq 2.6 \times 10^{24}$  kg et  $R_P \simeq 1500$  km à comparer à la Terre ( $6 \times 10^{24}$  kg et 6000 km) et Mars ( $6 \times 10^{23}$  kg et 3000 km), alors que pour les géantes gazeuses constituées d'H,  $A \simeq 1$  donne  $M_P \simeq 6.5 \times 10^{27}$  kg et  $R_P \simeq 75\,000$  km à comparer à Jupiter ( $2 \times 10^{27}$  kg et 70 000 km). L'accord est remarquable compte-tenu encore une fois des approximations <sup>(44)</sup>.

## 6. Structure formelle de l'électrostatique

Dans une théorie physique, les différents concepts et relations introduits n'ont pas tous le même statut. On part de principes ou lois fondamentales. Ce sont des énoncés indémontrables, mais dont la validité est admise en raison de vérifications expérimentales. En général le principe fait appel à des concepts "primitifs" (masse, charge par exemple) qu'il définit en même temps (même si cela semble peu satisfaisant, il faut se rendre à l'évidence, les concepts les plus primordiaux ne peuvent pas être définis rationnellement, ne serait-ce que parcequ'il faut bien les bases du langage pour communiquer, ou définir). Les expériences qui valident le(s) principe(s) ne vérifient pas nécessairement le principe directement, mais plus généralement ses conséquences. Toutes les conséquences déduites logiquement constituent autant de théorèmes. Il n'y a pas une présentation unique, car on peut ériger en principe des énoncés différents pour construire une théorie. On choisit en général de partir des énoncés les plus proches de l'expérience, ce qui correspond le plus souvent à la démarche historique.

<sup>(44)</sup> Pour des naines blanches il faudrait considérer des électrons relativistes,  $T = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$  et  $A = 1$ , et pour des étoiles à neutrons remplacer en plus les électrons par des neutrons  $m_e \rightarrow m_n$ .



**Tableau 2.1** Statuts des grandeurs physiques en électrostatique et structure de la théorie.

Loi	Expression mathématique	Statut
<b>Principe fondamental</b>		
Loi de Coulomb	$\mathbf{F}_{q \rightarrow q'} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$	principe <sup>(a)</sup>
<b>Grandeurs dérivées</b>		
Energie potentielle	$\mathcal{U}_{q \rightarrow q'} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}$	théorème <sup>(b)</sup>
Champ électrique	$\mathbf{E}_q = \mathbf{F}_{q \rightarrow q'}/q'$	définition
Potentiel électrique	$\phi_q = \mathcal{U}_{q \rightarrow q'}/q'$	définition
Champ coulombien	$\mathbf{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$	théorème
Potentiel coulombien	$\phi_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$	théorème
<b>Distributions de charges</b>		
Champ	$\mathbf{E}_\Omega = \sum_i \mathbf{E}_{q_i}$ ou $\int d\mathbf{E}$	théorème <sup>(c)</sup>
Potentiel	$\phi_\Omega = \sum_i \phi_{q_i}$ ou $\int d\phi$	théorème <sup>(c)</sup>
Flux	$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}_\Omega) = \oint_\Sigma \mathbf{E}_\Omega \cdot d\mathbf{S}$	définition
Théorème de Gauss	$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}_\Omega) = Q_\Sigma/\epsilon_0$	théorème

(a) Cette relation définit en même temps la charge électrique et fixe la valeur et les unités de la constante  $\epsilon_0$ .

(b) C'est un théorème issu de l'expression de la force et de la conservation de l'énergie en mécanique.

(c) C'est un théorème issu des théorèmes de superposition en mécanique.

On pourrait tout aussi bien partir du théorème de Gauss comme principe fondamental (il ne faudrait alors pas l'appeler de cette façon). Cela définirait le flux en même temps. On en déduirait alors le champ coulombien en  $1/r^2$  pour les sources ponctuelles par un théorème. L'expression de la force  $\mathbf{F}_{q \rightarrow q'} = q' \mathbf{E}_q$  devenant une définition, la force de Coulomb deviendrait un théorème. C'est une présentation un peu plus formelle mais tout à fait licite.

Il est intéressant de se pencher sur la structure formelle d'une théorie car on peut très facilement généraliser par analogie. Par exemple, partant de l'expression newtonienne de la force de gravitation comme principe fondamental de la gravitation,

$$\mathbf{F}_{m \rightarrow m'} = -G \frac{mm'}{r^2} \mathbf{u}_r,$$

et notant qu'elle a la même forme mathématique que la force de Coulomb, on constate qu'il suffit de faire les substitutions  $q \rightarrow m$  et  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow -G$  pour avoir en un seul tableau une théorie classique de la gravitation <sup>(45)</sup>.

<sup>(45)</sup> On sait bien entendu qu'il existe un théorème de Gauss pour la gravitation, conséquence immédiate de la décroissance en  $1/r$  du potentiel newtonien, tout comme le potentiel coulombien. La seule différence à ce niveau provient seulement du caractère toujours attractif de l'interaction gravitationnelle (ce n'est pas pour autant la seule différence importante, le principe d'équivalence n'a pas d'équivalent justement pour l'interaction électrique).

**Tableau 2.2** Statuts des grandeurs physiques pour la gravitation, construit par analogie immédiate avec le tableau correspondant pour l'électrostatique.

Loi	Expression mathématique	Statut
<b>Principe fondamental</b>		
Loi de Newton	$\mathbf{F}_{m \rightarrow m'} = -G \frac{mm'}{r^2} \mathbf{u}_r$	principe <sup>(a)</sup>
<b>Grandeurs dérivées</b>		
Energie potentielle	$\mathcal{U}_{m \rightarrow m'} = -G \frac{mm'}{r}$	théorème <sup>(b)</sup>
Champ de gravitation	$\mathbf{G}_m = \mathbf{F}_{m \rightarrow m'} / m'$	définition
Potentiel gravitationnel	$\phi_m = \mathcal{U}_{m \rightarrow m'} / m'$	définition
Champ newtonien	$\mathbf{G}_m = -G \frac{m}{r^2} \mathbf{u}_r$	théorème
Potentiel newtonien	$\phi_m = -G \frac{m}{r}$	théorème
<b>Distributions de masses</b>		
Champ	$\mathbf{G}_\Omega = \sum_i \mathbf{G}_{m_i}$ ou $\int d\mathbf{G}$	théorème <sup>(c)</sup>
Potentiel	$\phi_\Omega = \sum_i \phi_{m_i}$ ou $\int d\phi$	théorème <sup>(c)</sup>
Flux	$\Phi_\Sigma(\mathbf{G}_\Omega) = \oint_\Sigma \mathbf{G}_\Omega \cdot d\mathbf{S}$	définition
Théorème de Gauss	$\Phi_\Sigma(\mathbf{G}_\Omega) = -4\pi GM_\Sigma$	théorème

(a) Cette relation définit en même temps la masse gravitationnelle et fixe la valeur et les unités de la constante  $G$ .

(b) C'est un théorème issu de l'expression de la force et de la conservation de l'énergie en mécanique.

(c) C'est un théorème issu des théorèmes de superposition en mécanique.

On peut par exemple déduire des résultats de l'électrostatique l'expression du champ de gravitation créé en un point de son axe par une galaxie de masse  $M_{\text{galaxie}}$ , assimilée à un disque de rayon  $r_0$  et de densité uniforme :

$$\mathbf{G}_{\text{galaxie}} = -\frac{2GM_{\text{galaxie}}}{r_0^2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{r_0^2}{z^2} \right)^{-1/2} \right],$$

ou encore l'énergie potentielle d'une masse  $m$  à distance  $r$  du centre à l'intérieur d'une nébuleuse sphérique de densité uniforme et de rayon  $r_0$  :

$$\mathcal{U}_{\text{nébuleuse} \rightarrow m} = -\frac{GM_{\text{nébuleuse}}}{2r_0} \left[ 3 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right].$$

On peut également noter que comme le théorème de Gauss est simplement une conséquence de la forme en  $1/r^2$  du champ, il existe un théorème de Gauss pour l'interaction gravitationnelle comme pour l'électrostatique. Celui-ci permet de trouver très simplement la forme du champ de gravitation créé par diverses distributions de masses à symétrie sphérique par exemple.



# Chapitre 3

## Milieux conducteurs et diélectriques

On s'intéresse ici aux propriétés des milieux conducteurs et diélectriques. On présente tout d'abord l'approche microscopique avant de d'introduire un formalisme macroscopique.

### 1. Milieux conducteurs

#### 1.1. Structure et propriétés élémentaires des conducteurs et isolants à l'équilibre

##### *1.1.1. Champ et potentiel au sein d'un conducteur*

Dans un conducteur isolé à l'équilibre, le champ électrique total est nul. En effet, le milieu conducteur contenant des charges libres, lorsque celui-ci est soumis à un champ extérieur, il apparaît sur les électrons libres une force qui les déplace vers les surfaces du conducteur. Leur accumulation produit un champ induit opposé au champ extérieur et l'équilibre est réalisé lorsque la force résultante sur les porteurs libres s'annule, ce qui correspond à l'annulation du champ interne total (en un temps très bref de l'ordre de  $10^{-12}$  s). Cette propriété d'écrantage total du champ extérieur n'est possible que parce que le milieu comporte des charges libres de se déplacer.

L'intérieur d'un conducteur parfait à l'équilibre est donc caractérisé par  $\mathbf{E}_{\text{int}} = \mathbf{0}$ ,  $\phi_{\text{int}} = \text{Cst}$  (le volume est équipotentiel) et dans un volume suffisamment grand devant les longueurs microscopiques,  $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$ . Si le conducteur est chargé, les charges se distribuent en surface exclusivement.

A l'extérieur le potentiel est solution de l'équation de Laplace  $\Delta\phi = 0$ . Au voisinage immédiat de la surface externe du conducteur, le champ est normal à la surface et la

densité de charges est de la forme  $\sigma = -\varepsilon_0 \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_{\text{surf}}$ . Ce type d'expression constitue des conditions aux limites pour le potentiel.

Dans un milieu diélectrique (ou isolant), les charges sont liées et l'application d'un champ externe provoque seulement une orientation de dipôles insuffisante pour produire un écrantage total. En conséquence, le champ à l'intérieur du diélectrique est non nul et le potentiel électrostatique n'est pas constant.

### 1.1.2. Influence, condensateurs, capacité

Considérons un conducteur sphérique de rayon  $r_0$  porté à un potentiel  $V_0$  par rapport à la terre (on dit également que la différence de potentiel ou tension est donnée par  $U = \phi_0 - \phi_{\text{Terre}} = V_0$ ). Le conducteur porte alors une charge totale  $Q$  en surface, répartie uniformément sur la surface en raison de la symétrie sphérique car tous les points sont équivalents sur la surface d'une sphère. Le potentiel en surface est donc donné par

$$\phi_0 = \phi(r_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}.$$

On définit la capacité  $C$  du conducteur, coefficient géométrique qui exprime la quantité de charge que peut porter le conducteur soumis à la tension  $U$  par la relation

$$Q = CU. \quad (3.1)$$

Cette relation est générale et dans le cas du conducteur sphérique, la capacité est donc donnée par  $C = 4\pi\varepsilon_0 r_0$ . Du point de vue dimensionnel, on a

$$[C] = [\varepsilon_0][r_0] = \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{T}^2\mathfrak{C}^2, \quad [U] = [V_0] = \mathfrak{M}\mathfrak{L}^2\mathfrak{T}^{-2}\mathfrak{C}^{-1}$$

ce qui donne bien  $[CU] = \mathfrak{C}$ .

On peut noter qu'il est facile d'obtenir une quantité homogène à une énergie par l'intermédiaire du coefficient de capacité :

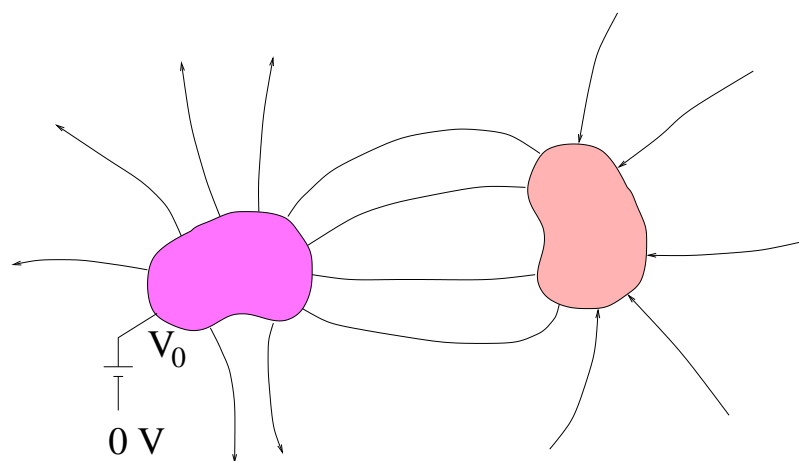
$$[CU] \times [U] = \mathfrak{C} \times [\phi] = \mathfrak{M}\mathfrak{L}^2\mathfrak{T}^{-2} = [\text{énergie}]$$

d'où la relation donnant l'énergie du conducteur chargé :  $\mathcal{U}_{\text{conducteur}} = \text{constante} \times CU^2$ . On notera qu'il ne faut pas confondre la notation  $\mathcal{U}_{\text{conducteur}}$  pour l'énergie avec la notation  $U$  pour la différence de potentiel. On peut montrer que la constante vaut  $1/2$ , soit :

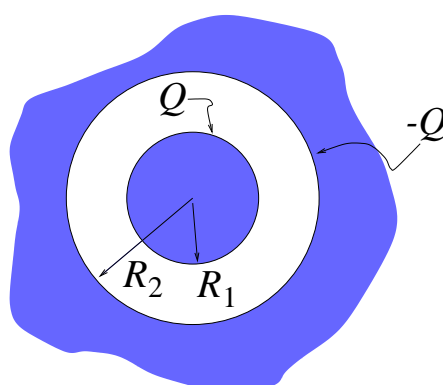
$$\mathcal{U}_{\text{conducteur}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}, \quad (3.2)$$

ce qui est conforme à l'expression donnant par exemple l'énergie de la sphère uniformément chargée en surface.

Supposons maintenant que l'on approche d'un conducteur chargé un second conducteur initialement neutre, amené depuis l'infini. Par influence, il apparaît sur l'élément de surface du second conducteur en regard avec le premier conducteur une distribution surfacique de charges due à l'existence d'un champ créé par le conducteur chargé qui doit être compensé dans le conducteur globalement neutre pour assurer l'écrantage total du champ à l'intérieur de celui-ci. La charge sur le second conducteur est appelée charge d'influence. Le phénomène d'influence se traduit par des lignes de champ qui partent d'une des surfaces pour arriver sur l'autre. Lorsque toutes les lignes de champ issues d'un conducteur parviennent à la surface de l'autre conducteur, l'influence est totale et la charge induite est exactement opposée à la charge influente.



**Figure 3.1** Influence entre deux conducteurs.



**Figure 3.2** Condensateur sphérique : le conducteur interne est maintenu à un potentiel  $\phi_1 > 0$  et le conducteur externe à un potentiel  $\phi_2 < 0$ , la tension vaut  $U = \phi_1 - \phi_2$ .

Les conducteurs en influence totale permettent la réalisation de condensateurs, caractérisés par leur capacité, coefficient géométrique qui mesure l'influence totale par la quantité de charges accumulables sur les armatures, comme dans le cas d'un conducteur isolé, en fonction de la différence de potentiel appliquée au condensateur :

$$Q = C(\phi_1 - \phi_2) = CU,$$

où l'on a choisi  $U > 0$  (le champ est dirigé de l'armature 1 vers l'armature 2) et  $Q$  la charge portée par l'armature 1 positive.

On peut calculer par exemple la capacité du condensateur sphérique : deux armatures métalliques sphériques concentriques de rayons  $R_1$  et  $R_2$ ,  $R_1 < R_2$ , séparées par un milieu isolant de permittivité  $\varepsilon_0$  (le vide) constituent un condensateur sphérique. Avec le choix d'une charge  $Q$  portée par l'armature interne, le champ électrique entre les armatures vaut simplement<sup>(46)</sup>

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \mathbf{u}_r = -\frac{d\phi}{dr} \mathbf{u}_r, \quad R_1 < r < R_2.$$

On en déduit la différence de potentiel entre les deux conducteurs :

$$U = \phi(R_1) - \phi(R_2) = -\int_2^1 E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

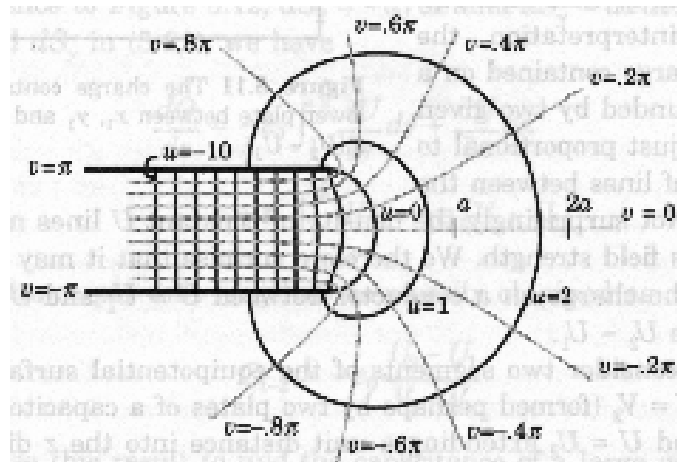
<sup>(46)</sup> En vertu du théorème de Gauss, la charge portée par l'armature externe n'intervient pas dans l'expression du champ dans la cavité vide entre les armatures et le champ est le même dans cette région que si seul le conducteur interne existait.

soit

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Comme  $[\epsilon_0] = \text{F.m}^{-1}$ , la capacité s'exprime en farads.

Un cas très utile en pratique dans les circuits électriques est celui du condensateur plan. Il s'agit dans la modélisation idéale de deux armatures planes infinies en regard l'une de l'autre. L'hypothèse d'armatures infinies est nécessaire pour qu'il y ait influence totale. Dans la pratique évidemment, les armatures ont une extension finie. On note conventionnellement  $S$  leur surface et  $e$  la distance qui les sépare. L'hypothèse ci-dessus revient à négliger les effets de bords, responsables de la fuite de lignes de champ illustrée ci-dessous ; elle est d'autant meilleure que  $e/\sqrt{S}$  est petit.



**Figure 3.3** Condensateur plan : illustration du phénomène de fuite des lignes de champ. Ces effets de bords sont totalement négligés dans le calcul.

Pour calculer la capacité du condensateur plan, on peut utiliser les résultats relatifs au condensateur sphérique et passer à la limite  $R \rightarrow \infty$ . Entre les armatures du condensateur sphérique, en un point  $r$  on note  $r = R_1 + \epsilon$ . Le champ électrique vaut

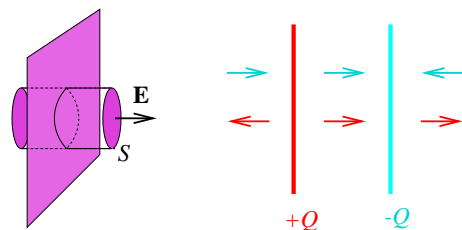
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{R_1}\right)^{-2}.$$

En introduisant la densité surfacique sur l'armature interne  $Q = 4\pi R_1^2 \sigma$ , on obtient le champ électrique entre les armatures du condensateur plan en passant à la limite  $R_1 \rightarrow \infty$  :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{\epsilon}{R_1}\right)^{-2} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Ce résultat s'obtient également par application du théorème de Gauss<sup>(47)</sup>.

<sup>(47)</sup> On calcule tout d'abord le champ créé par un plan chargé infini. Par symétrie, le champ est perpendiculaire au plan et dirigé de manière divergente si le plan est chargé positivement. Le flux à travers une surface fermée comportant deux sections identiques de part et d'autre du plan vaut  $2ES$  et la charge enfermée est donnée par  $\sigma S$ , d'où  $E = \sigma/2\epsilon_0$ . Par superposition des champs créés par deux plans infinis de charges opposées, on obtient le champ entre les armatures du condensateur plan  $E_{\text{cond. plan}} = \sigma/\epsilon_0$ .



Le potentiel entre les armatures du condensateur plan s'écrit donc (on note  $x$  l'axe perpendiculaire aux armatures)

$$\phi(x) = - \int E dx = - \frac{\sigma x}{\varepsilon_0} + \text{constante}$$

d'où l'on déduit la différence de potentiel

$$U = \phi_1 - \phi_2 = - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (x_1 - x_2) = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S}.$$

On en déduit la capacité  $C = \varepsilon_0 S/e$ , résultat cohérent avec la limite  $R \rightarrow \infty$  de la capacité du condensateur sphérique.

## 1.2. Courant électrique

### 1.2.1. Modèle de Drude de la conductivité électrique

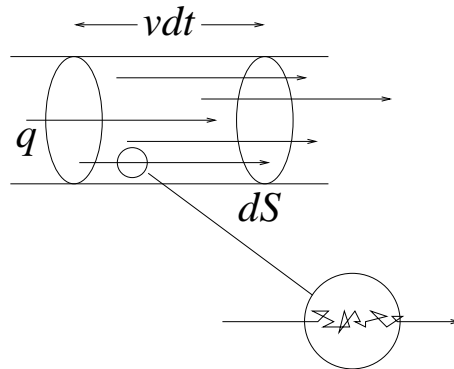
Dans le cas d'un conducteur non isolé, c'est-à-dire en contact avec les éléments d'un circuit électrique comportant au moins un générateur, il ne peut pas y avoir d'accumulation de charges sur les surfaces du conducteur car celles-ci sont évacuées par le circuit. Il règne alors un champ électrique non nul dans le conducteur, responsable du mouvement des charges libres.

Notons  $q$  la charge des porteurs libres (supposées positives, car les conventions relatives au courant électrique ont été élaborées avant la découverte de l'électron). En présence d'un champ  $\mathbf{E}$ , l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E}$$

et s'intègre en (on choisit une condition initiale telle que la vitesse soit nulle à l'instant  $t = 0$  où l'on branche le champ électrique)

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q\mathbf{E}}{m}t.$$



**Figure 3.4** Déplacement d'ensemble des charges libres responsable de l'apparition d'un courant électrique et schéma des collisions à l'échelle microscopique, modélisées par une force de frottement fluide.

Cette solution conduirait à un accroissement illimité (en l'absence d'effets relativistes) de la vitesse, mais en aucun cas à la saturation observée expérimentalement. Il faut donc introduire une force de frottement effective  $\mathbf{f}$  pour rendre compte des collisions des charges libres sur les impuretés du réseau cristallin

$$\mathbf{f} = - \frac{m}{\tau} \mathbf{v}.$$



Le paramètre  $\tau$ , introduit ici pour des raisons dimensionnelles, est la durée caractéristique séparant deux chocs consécutifs. L'équation du mouvement devient cette fois

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\mathbf{v} = \frac{q\mathbf{E}}{m},$$

et la solution s'écrit<sup>(48)</sup>

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q\mathbf{E}\tau}{m} \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Cette expression conduit à une saturation très rapide, au bout d'une durée de l'ordre de quelques fois la valeur de  $\tau$ , elle-même inférieure à la picoseconde, de sorte que l'on peut considérer dans la plupart des situations concrètes qu'un régime permanent est immédiatement atteint où les porteurs ont une vitesse (de dérive ou d'entraînement)

$$\mathbf{v}_{\text{dérive}} = \frac{q\mathbf{E}\tau}{m}. \quad (3.3)$$

La quantité  $v_{\text{dérive}}\tau$  représente donc la distance moyenne entre deux collisions successives (encore appelée libre parcours moyen). Cette distance, de l'ordre de 400 Å, est largement supérieure à la distance entre deux ions du réseau cristallin (de l'ordre de 3 Å), ce qui prouve que les collisions des porteurs de charges ont lieu sur les impuretés du réseau et pas sur les ions. On en déduit en particulier que la conductivité d'un métal s'améliore avec sa pureté.

L'ensemble des charges animées d'un mouvement de vitesse d'entraînement moyenne  $\mathbf{v}_{\text{dérive}}$  donne naissance à un courant électrique. On note

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}_{\text{dérive}} \quad (3.4)$$

la densité de courant ( $[\mathbf{j}] = \mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{C}$ ,  $\rho = nq$  étant la densité volumique de charges libres si  $n$  est le nombre de porteurs de charges par unité de volume). On déduit de cette expression une relation entre densité de courant et champ électrique appelée loi d'Ohm locale,

$$\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}, \quad \gamma = \frac{nq^2\tau}{m}. \quad (3.5)$$

L'intensité du courant électrique traversant une surface  $S$  donnée est mesurée par le nombre de lignes de courant traversant  $S$ , ou encore par la charge totale traversant  $S$  par unité de temps<sup>(49)</sup>. Mathématiquement on l'exprime par la relation

$$I = \frac{dq}{dt} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.6)$$

<sup>(48)</sup> Pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre, on procède comme suit :

- on résout dans un premier temps l'équation sans second membre,  $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = 0$ , ( $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_x$ ) soit  $\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau}$  :  $v_1(t) = \text{constante} \times e^{-t/\tau}$ ,

- puis on cherche une solution particulière de l'équation complète, ici par exemple une solution indépendante du temps,  $v_2 = \frac{qE\tau}{m}$ ,

- la solution complète cherchée est alors la somme de  $v_1(t)$  et de  $v_2$  et doit satisfaire les conditions aux limites du problème, à savoir  $v(t=0) = 0$  au moment où l'on a branché le champ  $E$ .

<sup>(49)</sup> Pour un problème à une dimension, on peut noter  $I = \frac{dq}{dt}$ ,  $dq = \rho d\tau$  et  $d\tau = S v_{\text{dérive}} dt$ , soit  $I = \rho v_{\text{dérive}} S = jS$ .

$I$  s'exprime en ampères (A) et l'on a  $[I] = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{C}$ . On exprime également  $j$  en  $\text{A.m}^{-2}$ .

Le modèle de Drude évoqué plus haut est très rudimentaire, mais il s'applique très bien aux conducteurs, en particulier aux métaux. De manière très générale, même si l'on ne dispose pas d'un modèle microscopique de conduction électrique, la loi d'Ohm locale est très naturelle. En effet, plus la tension imposée par le générateur est importante, plus le champ dans le conducteur est élevé et donc plus les charges libres se déplacent rapidement. La densité de courant  $\mathbf{j}$  augmente donc avec le champ  $\mathbf{E}$ . Quelle que soit la relation (écrite ici entre les modules des vecteurs sous la forme  $j = f(E)$ ) entre ces deux quantités, on peut la linéariser aux champs faibles :  $j = f(0) + Ef'(0) + \dots$ . Comme le courant est nul en l'absence de champ,  $f(0) = 0$  et l'on introduit une constante, la conductivité électrique  $\gamma = f'(E)$  qui conduit à nouveau à la loi d'Ohm locale, vérifiée avec une grande précision dans les applications courantes :  $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ . La conductivité a pour dimensions (en utilisant les dimensions  $[E] = \mathfrak{M}\mathfrak{L}\mathfrak{T}^{-2}\mathfrak{C}^{-1}$  et  $[j] = \mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{C}$ )  $[\gamma] = \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-3}\mathfrak{T}\mathfrak{C}^2$ , elle s'exprime en  $\text{S.m}^{-1}$  (siemens par mètre).

Dans les métaux, la conductivité est de l'ordre de  $\gamma = 10^8$  à  $10^9 \text{ S.m}^{-1}$ , la densité de porteurs de charges (électrons) de l'ordre de  $n = 8$  ou  $9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ , le temps de collision  $\tau = 2$  à  $3 \cdot 10^{-14} \text{ s}$  et le libre parcours moyen de l'ordre de  $400 \text{ \AA}$ .

### 1.2.2. Notion de résistance

Considérons un conducteur cylindrique de section  $S$ , de longueur  $l$ , soumis à une tension  $U = \phi_1 - \phi_2$ . On note  $Ox$  l'axe du conducteur, le champ électrique vaut  $\mathbf{E} = E\mathbf{u}_x$  et le potentiel électrostatique à l'intérieur vaut  $\phi(x) = -\int E dx = \phi_1 - Ex$  si l'on impose  $\phi(0) = \phi_1$ . La ddp est reliée à l'amplitude du champ car  $\phi(l) = \phi_2$  impose  $U = El$ .

L'intensité traversant le circuit vaut  $I = \frac{dq}{dt} = jS = \gamma ES$ . En comparant  $U$  et  $I$ , on définit un coefficient géométrique caractéristique du conducteur et appelé résistance électrique

$$R = \frac{U}{I} = \frac{l}{\gamma S}. \quad (3.7)$$

Ce résultat n'est correct que dans la géométrie cylindrique. On appelle également  $\gamma^{-1}$  la résistivité<sup>(50)</sup> et  $G = R^{-1}$  la conductance.

### 1.2.3. Résistance de fuite

Dans le cas des milieux isolants, il existe toujours une faible conductivité, responsable par exemple du mécanisme de décharge des condensateurs car le milieu diélectrique entre les armatures n'est jamais parfaitement isolant. Il est caractérisé par une faible conductivité  $\gamma$  qui permet un courant de fuite déchargeant le condensateur (modélisé en électrocinétique par l'association parallèle d'une capacité parfaite avec une résistance de fuite  $R_f$ ). Le calcul de la résistance de fuite se déduit de la loi d'Ohm.

Dans l'exemple du condensateur sphérique, on a :

$$I = \oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = \gamma \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{\gamma Q}{\varepsilon_0} = \frac{\gamma CU}{\varepsilon_0}$$

soit

$$R_f = \frac{U}{I} = \frac{\varepsilon_0}{C\gamma} = \frac{1}{4\pi\gamma} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Ayant introduit deux unités supplémentaires, les ohms ( $\Omega$ ), unités de résistance électrique ( $R$ ),  $1 \Omega = \mathfrak{M}\mathfrak{L}^2\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{C}^{-2}$ , et les farads, unités de capacité ( $C$ ),  $1 \text{ F} = \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{T}^2\mathfrak{C}^2$ , on a en particulier  $[RC] = [\varepsilon_0/\gamma] = \mathfrak{T}$ .

<sup>(50)</sup> Elle est fréquemment notée  $\rho$ , mais nous l'éviterons ici en raison du risque de confusion avec la densité volumique. Pour les mêmes raisons, nous n'emploierons pas la notation courante  $\sigma$  pour la conductivité à cause de la densité surfacique de charges.

### 1.2.4. Régimes variables

Supposons que la tension appliquée à un élément de circuit soit variable dans le temps (par exemple sinusoïdale,  $U(t)$ ). Si les variations temporelles ne sont pas trop rapides, on peut utiliser l'approximation des régimes quasi-permanents en vertu de laquelle les relations établies précédemment entre tension, courant ou charge, restent valables entre grandeurs instantanées. Si le signal appliqué (tension) est périodique, on peut définir sa fréquence  $f$  et comparer celle-ci à un phénomène périodique de référence en électromagnétisme, c'est-à-dire la lumière. A la même fréquence  $f$  pour la lumière, correspond une longueur d'onde  $\lambda = c/f$  qui caractérise l'échelle des variations spatiales des phénomènes lumineux. Si le circuit est de dimension petite par rapport à  $\lambda$ , on peut considérer que les valeurs du champ, du potentiel, etc, sont uniformes à un instant donné sur le circuit et donc que l'approximation des régimes quasi-permanents est valable. C'est le cas pour des fréquences jusqu'à quelques MHz.

L'expression  $Q = CU$  pour un condensateur, généralisée aux régimes variables, donne ainsi

$$Q(t) = CU(t).$$

Combinée à la définition de l'intensité

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt},$$

on obtient la relation fonctionnelle d'un condensateur en régime variable

$$I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}. \quad (3.8)$$

De même pour un conducteur cylindrique, les relations  $U(t) = E(t)l$  et  $I(t) = j(t)S = \gamma E(t)S$  entraînent la relation fonctionnelle des résistors

$$U(t) = RI(t). \quad (3.9)$$

## 1.3. Energie d'un système de conducteurs dans le vide

Le calcul de l'énergie électrostatique d'un système composé d'un ensemble de conducteurs parfaits dans le vide ne présente pas de difficulté thermodynamique car, le champ électrique étant nul dans les conducteurs, il ne modifie pas les propriétés de la matière. La situation est différente pour les milieux diélectriques dans lesquels le champ est non nul.

Considérons un ensemble de conducteurs dont les surfaces  $S_\alpha$ , portées aux potentiels  $V_\alpha$ , présentent des charges  $Q_\alpha$ . On suppose qu'il n'y a pas de charges à l'infini, de sorte que le potentiel y est nul. L'énergie électrostatique s'écrit

$$u_{\text{syst}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\text{espace ext.}} E^2 d\tau.$$

On transforme cette expression en intégrale de surface

$$u_{\text{syst}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_{\text{espace ext.}} \mathbf{E} \nabla \phi d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left[ \int_{\text{espace ext.}} \phi \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau - \int_{\text{espace ext.}} \operatorname{div}(\phi \mathbf{E}) d\tau \right],$$

où le premier terme est nul puisque la somme porte sur une région vide de charges, soit  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . Il reste

$$u_{\text{syst}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \oint_{\Sigma} \phi \mathbf{E} d\mathbf{S}$$

où  $\Sigma$  est la surface fermée limitant l'espace extérieur aux conducteurs. Elle est constituée de la somme des surfaces  $S_\alpha$  des conducteurs (la normale y est orientée vers l'intérieur des conducteurs, soit  $\oint_{S_\alpha} \mathbf{E} d\mathbf{S} = -Q_\alpha/\varepsilon_0$ ) et d'une surface rejetée à l'infini sur laquelle le flux de  $\phi \mathbf{E}$  est nul dans cette limite. Il vient

$$u_{\text{syst}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \sum_{\alpha} \oint_{S_\alpha} \phi(S_\alpha) \mathbf{E}(S_\alpha) d\mathbf{S}_\alpha = +\frac{1}{2} \sum_{\alpha} Q_\alpha V_\alpha. \quad (3.10)$$

## 1.4. Force agissant sur un conducteur

Considérons tout d'abord un système isolé, par exemple un condensateur plan parfait. Les armatures, distantes de  $x$ , portent des charges  $+Q$  et  $-Q$ , de sorte qu'il existe entre elles une force attractive  $F$ . L'énergie du système vaut  $\mathcal{U} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sx = \frac{1}{2} \frac{Q^2 x}{\varepsilon_0 S}$  et elle augmente si la distance entre armatures  $x$  augmente (la charge est constante car le système est isolé). Pour augmenter cette distance de  $dx$ , on doit exercer de l'extérieur une force opposée à  $F$ , nécessitant un travail  $\delta W = +F_{\text{ext}} dx$  égal à l'augmentation d'énergie du système, soit  $d\mathcal{U} = -F dx$ . On en déduit l'expression de la force à charge constante

$$F = - \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \right)_Q. \quad (3.11)$$

Si le système n'est pas isolé, mais maintenu à un potentiel constant, la situation physique change, puisque les charges des armatures peuvent maintenant varier. En effet, si  $x$  augmente, la charge portée par l'armature positive diminue  $Q = CV = \frac{\varepsilon_0 S}{x} V$  et doit donc circuler sous la tension  $V$  de sorte que l'énergie totale du système varie de  $d\mathcal{U} = +F_{\text{ext}} dx + V dQ$  d'où l'on déduit la force entre armatures à potentiel constant :

$$F = - \left( \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{U} - QV) \right)_V = - \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{U}}}{\partial x} \right)_V,$$

où  $\tilde{\mathcal{U}}$  se déduit de l'énergie par une transformation de Legendre,  $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} - QV$ , comme en thermodynamique.

Pour un ensemble de conducteurs on a

$$F_\alpha = - \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_\alpha} \right)_{Q_\beta} = - \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{U}}}{\partial x_\alpha} \right)_{V_\beta}, \quad \tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U} - \sum_\alpha Q_\alpha V_\alpha. \quad (3.12)$$

## 2. Méthodes de résolution de l'équation de Laplace

### 2.1. Théorème d'unicité

La résolution d'un problème d'électrostatique passe fréquemment par la résolution de l'équation de Laplace. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles et le problème physique doit spécifier les conditions aux limites. Supposons par exemple un ensemble de conducteurs, chargés ou portés à certains potentiels, en présence desquels on cherche à déterminer le potentiel en tout point de l'espace. La zone interne aux volumes des conducteurs ne présente pas de difficulté et l'on doit résoudre l'équation de Laplace à l'extérieur. On peut spécifier les potentiels  $\phi_\alpha$  sur les surfaces des conducteurs (conditions aux limites de Dirichlet) ou bien les distributions de charges  $\sigma_\alpha = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial n}$  sur ces mêmes surfaces (conditions aux limites de Neumann). On peut alors montrer que la solution de l'équation de Laplace satisfaisant aux conditions aux limites est unique (le potentiel en un point quelconque est éventuellement déterminé à une constante additive près, mais cela correspond à une situation physique unique).

Appelons  $S_\alpha$  les surfaces des conducteurs sur lesquelles on a précisé les conditions aux limites et supposons qu'il n'y a pas de charges à l'infini. On notera  $\Sigma = \cup_\alpha S_\alpha + S_\infty$

où  $S_\infty$  est une surface rejetée à l'infini. Le domaine  $\Omega$  dans lequel on cherche une solution de l'équation de Laplace est contenu dans  $\Sigma$ . On peut écrire

$$\oint_{\Sigma} \phi \nabla \phi \, d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\phi \nabla \phi) \, d\tau = \int_{\Omega} (\nabla \phi)^2 \, d\tau + \int_{\Omega} \phi \Delta \phi \, d\tau.$$

La dernière intégrale est nulle par hypothèse.

- Conditions aux limites de Dirichlet : supposons qu'il existe deux solutions du problème physique,  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . L'égalité précédente est vraie pour la différence  $\phi_1 - \phi_2$  (principe de superposition) :

$$\oint_{\Sigma} \underbrace{(\phi_1 - \phi_2)}_0 \nabla(\phi_1 - \phi_2) \, d\mathbf{S} = \int_{\Omega} [\nabla(\phi_1 - \phi_2)]^2 \, d\tau$$

où le premier terme est nul puisque  $\phi_1(\Sigma) = \phi_2(\Sigma)$  sur  $\Sigma$ . On en déduit que  $\nabla(\phi_1 - \phi_2) = \mathbf{0}$  dans  $\Omega$ , soit  $\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r}) + \text{Cst}$ . La constante est par ailleurs nulle en raison de la contrainte imposée sur les surfaces.

- Conditions aux limites de Neumann : le même raisonnement conduit cette fois à

$$\oint_{\Sigma} (\phi_1 - \phi_2) \underbrace{\nabla(\phi_1 - \phi_2)}_0 \, d\mathbf{S} = \int_{\Omega} [\nabla(\phi_1 - \phi_2)]^2 \, d\tau$$

et à la même conclusion  $\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r}) + \text{Cst}$ .

## 2.2. Méthode des images électriques

La méthode des images électriques permet de traiter les problèmes de conducteurs influencés par des charges électriques. Dans les conducteurs à l'équilibre,  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  et  $\phi = \text{Cst}$ . Il suffit de remplacer les conducteurs influencés par une distribution de charges plus simple de sorte que les surfaces des conducteurs dans le problème initial,  $S_\alpha$ , correspondent à des surfaces équipotentielles dans le problème transformé avec les charges images. Cette distribution image ne doit pas modifier le potentiel à l'extérieur, il ne peut donc y avoir d'images que dans la zone interne aux conducteurs. La résolution du problème image permet de calculer le champ en tout point extérieur et par conséquent d'en déduire la densité surfacique induite à la surface des conducteurs par  $\sigma = \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$  où  $\mathbf{n}$  est la normale locale de l'équipotentielle équivalente  $S_\alpha$ .

## 2.3. Séparation des variables

### 2.3.1. Coordonnées cartésiennes

La méthode de séparation des variables est extrêmement performante. Elle consiste, en coordonnées cartésiennes, à chercher une solution de l'équation de Laplace sous la forme d'un produit de fonctions à une variable :

$$\phi(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z).$$

L'équation  $\frac{1}{\phi} \Delta \phi = 0$  entraîne alors

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

Des fonctions de variables différentes ne peuvent être égales pour toutes valeurs de leurs arguments que si elles sont constantes, de sorte que l'égalité ci-dessus impose

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = p^2 X, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} = q^2 Y, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} = r^2 Z$$

avec  $p^2 + q^2 + r^2 = 0$  où  $p, q$  et  $r$  sont réels ou imaginaires purs. Les trois équations ci-dessus sont de forme harmonique, leurs solutions sont de la forme

$$X(x) = A_+ e^{px} + A_- e^{-px}$$

et la solution générale est une combinaison linéaire de l'ensemble de toutes les solutions :

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{p,q,r} [A_+^{(p)} e^{px} + A_-^{(p)} e^{-px}] \cdot [A_+^{(q)} e^{qy} + A_-^{(q)} e^{-qy}] \cdot [A_+^{(r)} e^{rz} + A_-^{(r)} e^{-rz}]. \quad (3.13)$$

Les constantes  $A_{\pm}$  et  $p, q, r$  doivent être déterminées à l'aide des conditions aux limites.

### Exemple :

Deux plans conducteurs semi-infinis perpendiculaires à  $Oy$ , situés en  $y = 0$  et  $y = a$ , limités par l'axe  $Oz$ , sont reliés à la terre. Ils sont bordés par une bande de largeur  $a$  perpendiculaire à  $Ox$  maintenue au potentiel  $V_0$ . Le problème est invariant par translation parallèlement à  $Oz$ , donc  $r^2 = 0$ . Le potentiel reprend deux fois la même valeur lorsque  $y$  varie, en  $y = 0$  et  $y = a$ , donc  $q^2 < 0$  de sorte que  $Y(y)$  soit une fonction oscillante. On pose  $q = ik$ , soit

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 Y = 0, \quad Y(y) = B_c \cos ky + B_s \sin ky.$$

Les contraintes  $\phi(x, 0) = 0$  et  $\phi(x, a) = 0$  imposent  $B_c = 0$  et  $k = \frac{n\pi}{a}$  avec  $n = 1, 2, 3, \dots$ . La solution générale s'écrit

$$\phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_+ e^{n\pi x/a} + A_- e^{-n\pi x/a}] \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right).$$

La dernière contrainte  $\phi(0, y) = V_0$  entraîne

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} [A_+ + A_-] \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right), \quad \forall y.$$

On la résout à l'aide des relations d'orthogonalisation des fonctions trigonométriques :

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{p\pi y}{a}\right) dy = \frac{1}{2} a \delta_{n,p}$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{p\pi y}{a}\right) dy = \begin{cases} 0 & p \text{ pair} \\ 2a/p\pi & p \text{ impair} \end{cases}$$

qui conduisent à

$$\phi(x, y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4V_0}{(2\ell+1)\pi} \sin\left(\frac{(2\ell+1)\pi y}{a}\right) e^{-(2\ell+1)\pi x/a}.$$

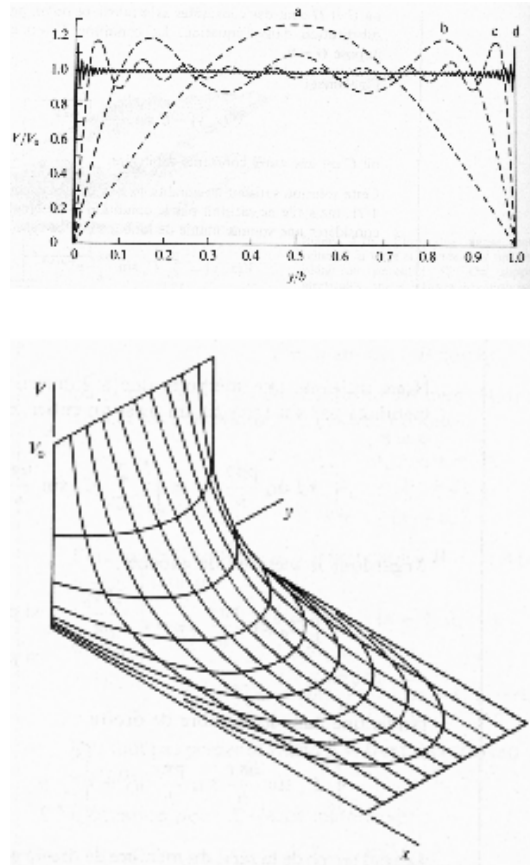


Figure 3.5 Allure des différents modes et du potentiel total.

### 2.3.2. Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques, l'équation de Laplace s'écrit

$$\Delta\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

En posant  $\phi(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ , on parvient à séparer la variable  $\varphi$  :

$$\frac{r^2 \sin^2 \theta}{R\Theta\Phi} \Delta[R\Theta\Phi] = 0 = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{R(r)} \frac{d^2}{dr^2} (rR(r)) + \frac{\sin \theta}{\Theta(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \underbrace{\frac{1}{\Phi(\varphi)} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}}_{-m^2},$$

qui entraîne que le dernier terme soit égal à une constante Cst. La solution de l'équation de Laplace doit évidemment respecter la symétrie de rotation de  $2\pi$  autour de l'axe  $Oz$  :  $\phi(r, \theta, \varphi + 2\pi) = \phi(r, \theta, \varphi)$ , ce qui impose pour la partie azimutale  $\Phi(\varphi)$  une solution périodique de période  $2\pi/m$  avec  $m$  entier, c'est-à-dire Cst =  $-m^2$ , soit

$$\Phi_m(\varphi) = A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi.$$

L'équation en  $r$  et  $\theta$  devient

$$\underbrace{\frac{r}{R(r)} \frac{d^2}{dr^2} (rR(r))}_{\ell(\ell+1)} = - \underbrace{\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta}}_{-\ell(\ell+1)},$$

où les deux membres doivent être constants. La constante est notée  $\ell(\ell + 1)$  en toute généralité et cette notation simplifie les expressions ultérieures. La recherche de solutions en lois de puissance pour la partie radiale conduit à

$$R_\ell(r) = C_\ell r^\ell + \frac{D_\ell}{r^{\ell+1}}.$$

On pose finalement  $x = \cos \theta$  pour obtenir une équation pour  $\Theta(x)$  :

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right) + \left( \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \Theta(x) = 0,$$

dont les solutions sont les fonctions de Legendre associées. Si l'on requiert une solution non singulière en  $x = \pm 1$ , seules les  $P_\ell^m(x)$  avec  $\ell$  entier positif ou nul et  $-\ell \leq m \leq \ell$  sont permises :

$$\Theta(\theta) = E_{\ell m} P_\ell^m(\cos \theta).$$

La solution générale est donnée par une combinaison linéaire

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} [A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi] \times \left[ C_\ell r^\ell + \frac{D_\ell}{r^{\ell+1}} \right] \times E_{\ell m} P_\ell^m(\cos \theta) \quad (3.14)$$

Les valeurs des constantes sont ensuite imposées par les conditions aux limites. On introduit également les harmoniques sphériques,  $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \text{const.} \times P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$  de sorte que l'on a

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[ A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right] \times Y_\ell^m(\theta, \varphi). \quad (3.15)$$

Dans le cas particulier, très fréquent, où le problème présente une symétrie cylindrique autour de l'axe  $Oz$ , le potentiel est indépendant de  $\varphi$ , ce qui sélectionne  $m = 0$  dans la solution générale :

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right] \times P_\ell(\cos \theta). \quad (3.16)$$

Si le potentiel est non divergent à l'origine,  $B_\ell = 0, \forall \ell$ , s'il est non divergent à l'infini,  $A_\ell = 0, \forall \ell \geq 1$ .

### Formulaire :

Les fonctions de Legendre associées sont définies à partir des polynômes de Legendre :

$$P_\ell^m(x) = (x^2 - 1)^{m/2} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_\ell(x)$$

eux-mêmes donnés par la formule de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \equiv P_\ell^0(x).$$



Les relations d'orthogonalisation s'écrivent

$$\int_{-1}^1 P_k^m(x) P_\ell^m(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!} \delta_{k,\ell},$$

$$\int_{-1}^1 P_k(x) P_\ell(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{k,\ell}.$$

Les premiers polynômes de Legendre valent

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

On introduit également les harmoniques sphériques

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

La constante en préfacteur est choisie pour assurer la normation des harmoniques sphériques avec la mesure d'intégration usuelle :

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \bar{Y}_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi) Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}.$$

## 2.4. Transformations conformes

Dans une région vide de charges, on a

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

qui entraînent respectivement que  $\mathbf{E}$  peut s'écrire comme le rotationnel d'un champ de vecteurs,  $\mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{C}$ , ou comme le gradient d'un champ scalaire,  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ .

Dans un problème bidimensionnel, c'est-à-dire invariant par translation parallèlement à un axe  $Oz$ ,  $E_z = 0$  et il reste les composantes

$$E_x = \frac{\partial C_z}{\partial y} - \underbrace{\frac{\partial C_y}{\partial z}}_0 \quad \text{et} \quad E_y = \underbrace{\frac{\partial C_x}{\partial z}}_0 - \frac{\partial C_z}{\partial x},$$

de sorte qu'en appelant  $\psi(x, y)$  l'unique composante  $C_z$  du potentiel vecteur, il vient

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ E_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Or on sait qu'une fonction complexe de deux variables  $x$  et  $y$ ,  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , est holomorphe si les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dans ces conditions,  $f$  est une fonction analytique de la variable complexe  $\zeta = x + iy$  :  $f(x, y) \equiv f(\zeta)$ .

On peut donc construire un potentiel complexe  $\mathcal{V}(x, y) = \phi(x, y) - i\psi(x, y)$  qui sera une fonction analytique de  $\zeta$ . Parties réelle et imaginaire sont alors des fonctions harmoniques, *i.e.*  $\Delta\phi = \Delta\psi = 0$ ,  $\Delta \cdot = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot$ .

Les équipotentielles sont les courbes le long desquelles  $\phi = \text{Cst}$ . De même, les lignes de champ sont données par  $\psi = \text{Cst}$ .

Considérons maintenant une transformation conforme  $w = u + iv = re^{i\alpha} = f(\zeta)$ ,  $\zeta = x + iy = \rho e^{i\varphi}$ . Elle réalise la projection du plan complexe  $\zeta$  sur le plan complexe  $w$ . Ce type de projection conforme conserve les angles. Connaissant le potentiel complexe  $\mathcal{V}(\zeta)$  dans la géométrie initiale  $\zeta$ , on en déduit un nouveau potentiel complexe  $\mathcal{V}(w)$  adapté à la géométrie  $w$  dans laquelle les conditions aux limites sont également transformées :  $w = f(\zeta)$ , soit  $\zeta = f^{-1}(w)$ , d'où l'on déduit  $\mathcal{V}(\zeta) = \mathcal{V}[f^{-1}(w)] \equiv \tilde{\mathcal{V}}(w)$  où la fonction  $\tilde{\mathcal{V}}$  est définie par  $\tilde{\mathcal{V}} \equiv \mathcal{V} \circ f^{-1}$ . Elle est également analytique, de sorte que l'on peut écrire  $\tilde{\mathcal{V}}(w) = \tilde{\phi}(u, v) - i\tilde{\psi}(u, v)$  avec  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\psi}$  satisfaisant à l'équation de Laplace  $\Delta\tilde{\phi} = \Delta\tilde{\psi} = 0$ . Cela signifie que  $\tilde{\phi}(u, v)$  est le potentiel électrostatique dans la géométrie transformée. Les lignes équipotentielles du plan  $\zeta$  se projettent sur les équipotentielles du plan  $w$  et les lignes de champ se transforment de même. Le champ électrostatique dans la nouvelle géométrie s'obtient par

$$\begin{aligned}\tilde{E}_u &= -\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial u} = \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial v}, \\ \tilde{E}_v &= -\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial v} = -\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial u}.\end{aligned}$$

### Exemple :

Effets de bords du condensateur. Dans le plan  $\zeta$ , un condensateur plan infini est constitué de deux armatures en  $y = -a$  et  $y = a$  (respectivement portées aux potentiels  $-V$  et  $+V$ ). Le champ électrique est de la forme  $\mathbf{E} = -\frac{V}{a}\mathbf{u}_y$  entre les armatures, d'où l'on déduit  $\phi(x, y) = \frac{V}{a}y$  et  $\psi(x, y) = \frac{V}{a}x$  en choisissant les constantes d'intégration nulles. Le potentiel complexe s'écrit  $\mathcal{V}(\zeta) = \frac{V}{a}(y - ix) = -i\frac{V}{a}\zeta$ .

Considérons la transformation conforme  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  <sup>(51)</sup> :

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{h}{\pi} \left[ e^{\pi x/a} \cos \frac{\pi y}{a} + \frac{\pi x}{a} + 1 \right], \\ v(x, y) &= \frac{h}{\pi} \left[ e^{\pi x/a} \sin \frac{\pi y}{a} + \frac{\pi y}{a} \right].\end{aligned}$$

On peut encore écrire

$$f(\zeta) = \frac{h}{\pi} \left[ e^{\pi\zeta/a} + \frac{\pi\zeta}{a} + 1 \right].$$

Elle projette les armatures  $y = \pm a$  sur des armatures semi-infinies dans le plan  $w$  :  $v = \pm h$ ,  $u \leq 0$ . Les équipotentielles du plan  $z$ ,  $y = \kappa a$ ,  $\kappa \in [-1, 1]$  deviennent les courbes paramétrées par  $\kappa$  dans le plan  $w$  :

$$\begin{aligned}u(x, \kappa a) &= \frac{h}{\pi} \left[ e^{\pi x/a} \cos \kappa\pi + \frac{\pi x}{a} + 1 \right], \\ v(x, \kappa a) &= \frac{h}{\pi} \left[ e^{\pi x/a} \sin \kappa\pi + \kappa\pi \right].\end{aligned}$$

<sup>(51)</sup> On peut s'assurer que les conditions de Cauchy-Riemann sont en effet satisfaites.

Les composantes du champ électrique ne se déduisent pas facilement de  $f(\zeta)$  qui n'est pas inversible, ce qui n'autorise pas une expression analytique du potentiel complexe transformé  $\tilde{\mathcal{V}}(w)$ . On peut en revanche écrire en toute généralité :

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x} = \tilde{E}_u \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{E}_v \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial y} = \tilde{E}_u \frac{\partial u}{\partial y} + \tilde{E}_v \frac{\partial v}{\partial y},$$

dont les solutions sont de la forme

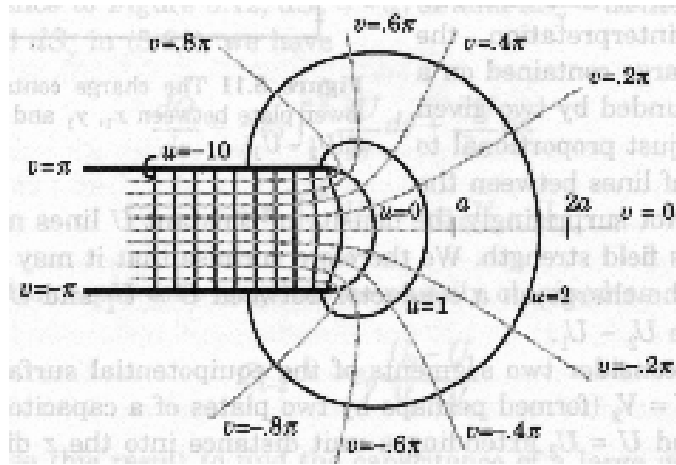
$$\tilde{E}_u = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} E_x & \frac{\partial v}{\partial x} \\ E_y & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \tilde{E}_v = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & E_x \\ \frac{\partial u}{\partial y} & E_y \end{vmatrix}$$

où le déterminant vaut  $D = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = |f'(\zeta)|^2$ . L'application donne ici les expressions paramétrées

$$\tilde{E}_u = \frac{V}{h} \frac{e^{\pi x/a} \sin \pi y/a}{e^{2\pi x/a} + 1 + 2e^{\pi x/a} \cos \pi y/a}$$

$$\tilde{E}_v = -\frac{V}{h} \frac{e^{\pi x/a} \cos \pi y/a + 1}{e^{2\pi x/a} + 1 + 2e^{\pi x/a} \cos \pi y/a}$$

qui permettent ensuite de tracer les lignes de champ et de mettre en évidence les effets de bords au voisinage de l'extrémité des armatures dans la géométrie  $w$ .



## 2.5. Solutions numériques

On peut résoudre numériquement l'équation de Laplace à partir du développement de Taylor du potentiel. Dans le cas d'un problème bidimensionnel par exemple, on a :

$$\phi(x \pm \epsilon, y) = \phi(x, y) \pm \frac{\partial\phi}{\partial x}\epsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\epsilon^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4),$$

$$\phi(x, y \pm \epsilon) = \phi(x, y) \pm \frac{\partial\phi}{\partial y}\epsilon + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\epsilon^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3\phi}{\partial y^3}\epsilon^3 + \mathcal{O}(\epsilon^4),$$

de sorte que

$$\phi(x + \epsilon, y) + \phi(x - \epsilon, y) + \phi(x, y + \epsilon) + \phi(x, y - \epsilon) = 4\phi(x, y) + \epsilon^2 \Delta \phi(x, y) + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

Si le potentiel satisfait à l'équation de Laplace, le potentiel en un point est donné par la moyenne arithmétique sur les quatre voisins à des termes d'ordre 4 près :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{4}[\phi(x + \epsilon, y) + \phi(x - \epsilon, y) + \phi(x, y + \epsilon) + \phi(x, y - \epsilon)].$$

Pratiquement, on part d'une initialisation quelconque du potentiel et on itère la relation précédente, le potentiel restant fixé sur des conditions aux limites données, jusqu'à converger dans la limite d'une précision choisie.

## 3. Milieux diélectriques

### 3.1. Introduction

Les milieux diélectriques sont isolants ou très peu conducteurs. Les charges présentes dans la matière diélectrique sont liées aux atomes ou molécules et par conséquent ne sont susceptibles que de déplacements de faible amplitude (polarisation) sous l'influence d'un champ électrique, ce qui distingue leurs propriétés de celles des milieux conducteurs. Le champ électrique pénètre dans la matière, ce qui entraîne des conséquences sur le plan thermodynamique car le champ modifie les propriétés locales de la matière.

Les processus de polarisation sont nombreux. Le plus simple résulte d'une modification locale de la distribution de charge électronique, mécanisme appelé polarisabilité. Il se produit dans tous les matériaux. Si la matière comporte des dipôles permanents, ceux-ci peuvent s'orienter sous l'effet d'un champ externe, il s'agit de la polarisation d'orientation. La polarisation d'interface se rencontre dans les matériaux composites constitués de domaines conducteurs baignant dans une matrice isolante. Dans tous les cas, le dipôle électrostatique constitue l'élément clé des mécanismes de polarisation.

### 3.2. Le dipôle électrostatique

#### 3.2.1. Potentiel et champ du dipôle

Le dipôle électrostatique est composé de deux charges opposées,  $+q$  et  $-q$ , distantes de  $\ell$ . On définit le moment dipolaire  $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$  orienté de  $-q$  vers  $+q$ . L'origine  $O$  étant choisie au milieu du dipôle, en un point  $M$  situé à distance  $r$  dans la direction  $\theta$  par rapport à  $\mathbf{p}$ , le potentiel s'écrit

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right),$$

où  $r_+$  et  $r_-$  sont respectivement les distances des charges  $+q$  et  $-q$  au point d'observation. Dans l'approximation dipolaire, à savoir lorsque  $r \gg \ell$ , on a

$$\frac{1}{r_{\pm}} = r^{-1} \left( 1 \mp \frac{\ell}{r} \cos \theta + \frac{\ell^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \simeq r^{-1} \left( 1 \mp \frac{\ell}{2r} \cos \theta + \mathcal{O} \left[ \frac{\ell^2}{r^2} \right] \right)$$

qui conduit à l'expression du potentiel du dipôle à grande distance :

$$\phi(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (3.18)$$

Il décroît plus rapidement que le potentiel coulombien en raison de la compensation partielle qui se produit entre les deux charges opposées.

Les composantes du champ électrique en coordonnées polaires valent :

$$\begin{aligned} E_r(r, \theta) &= -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \\ E_\theta(r, \theta) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

En coordonnées cartésiennes on a

$$\phi(x, y, z) = \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$$E_x(x, y, z) = \frac{3pxz}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad E_y(x, y, z) = \frac{3pyz}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad E_z(x, y, z) = \frac{p(3z^2 - r^2)}{4\pi\epsilon_0 r^5}.$$

Les équipotentielles, solutions de  $\phi(r, \theta) = \phi_0$ , sont données par

$$r = r_0 \sqrt{|\cos \theta|}, \quad r_0 = \left( \frac{p}{4\pi\epsilon_0 |\phi_0|} \right)^{1/2}$$

et les lignes de champ, définies par l'équation  $E_\theta dr - E_r r d\theta = 0$ , sont données par

$$r = r_0 \sin^2 \theta.$$

Plongé dans un champ extérieur, le dipôle est soumis à un couple  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E}_{\text{ext}}$  et possède une énergie potentielle  $\mathcal{U} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}$ .

### 3.2.2. Développements multipolaires

Pour un système de  $N$  charges ponctuelles  $q_i$  situées aux points  $\mathbf{r}_i$ , l'expression du potentiel peut s'obtenir par un développement multipolaire valide à grande distance. Etant donnée une origine arbitraire  $O$ , le potentiel en un point  $M$  en  $\mathbf{r}$  s'écrit exactement

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|},$$

où l'on se propose de développer  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$  en polynômes de Legendre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} &= \frac{1}{r} \left( 1 - 2 \frac{r_i}{r} \cos \theta_i + \frac{r_i^2}{r^2} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{r_i}{r} \cos \theta_i - \frac{r_i^2}{2r^2} + \frac{3}{8} \left[ \frac{r_i^2}{r^2} - 2 \frac{r_i}{r} \cos \theta_i \right]^2 + \dots \right), \end{aligned}$$

ce qui conduit aux termes successifs :

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \underbrace{\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r}}_{\text{monopolaire}} + \underbrace{\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_i \cos \theta_i}{r^2}}_{\text{dipolaire}} + \underbrace{\frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{3r_i^2 \cos^2 \theta_i - r_i^2}{2r^3}}_{\text{quadripolaire}} + \dots \quad (3.20)$$

La fonction  $G(\epsilon, \theta) = (1 - 2\epsilon \cos \theta + \epsilon^2)^{-1/2}$  étant la fonction génératrice des polynômes de Legendre,  $G(\epsilon, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \epsilon^n$ , on retrouve l'expression

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^n \quad (3.21)$$

où  $r_{<}$  ( $r_{>}$ ) est la plus courte (longue) des deux distances  $r$  et  $r'$  et  $\theta$  l'angle entre les deux vecteurs. On en déduit :

$$\phi_i(\mathbf{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta_i) \left( \frac{r_i}{r} \right)^n, \quad (3.22)$$

soit

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta_i) \left( \frac{r_i}{r} \right)^n. \quad (3.23)$$

Dans une expression de ce type, si l'on s'intéresse au potentiel à grande distance, la contribution dominante est donnée par le premier terme non nul du développement.

- Distribution chargée (ou monopolaire) : si la charge totale de la distribution est non nulle, on peut poser  $Q = \sum_i q_i$  et choisir l'origine au barycentre des charges de sorte que  $\sum_i q_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$  et le potentiel à grande distance est simplement coulombien :

$$\phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

- Distribution dipolaire <sup>(52)</sup> : lorsque la distribution de charges est globalement neutre, le terme monopolaire purement coulombien s'annule et le terme dominant suivant est le terme dipolaire. Dans ce cas, on divise l'ensemble en charges positives  $Q = \sum_{q_i > 0} q_i$  et charges négatives  $-Q = \sum_{q_i < 0} q_i$ , ce qui permet d'écrire

$$\sum_i q_i \mathbf{r}_i = \underbrace{\sum_{q_i > 0} q_i \mathbf{r}_i}_{Q\mathbf{R}_+} + \underbrace{\sum_{q_i < 0} q_i \mathbf{r}_i}_{-Q\mathbf{R}_-} = Q(\mathbf{R}_+ - \mathbf{R}_-) = \mathbf{P}.$$

$\mathbf{P}$  est le dipôle équivalent à la distribution observée à grande distance, le potentiel prenant simplement la forme

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

<sup>(52)</sup> On appelle aussi distribution polaire une distribution comportant des moments dipolaires permanents.

Un cas particulier est évidemment le dipôle électrostatique. De nombreuses molécules neutres sont porteuses de moments dipolaires en raison de la polarisation partielle des liaisons covalentes entre éléments chimiques d'électronégativités différentes. C'est le cas par exemple de la molécule d'eau dans laquelle les deux liaisons OH, non colinéaires, sont polarisées (excédent de charge négative, égal à une fraction de charge électronique, sur l'oxygène et déficit sur l'hydrogène), et produisent un moment dipolaire résultant égal à  $P = 0.61 \times 10^{-29}$  Cm.

• Distribution quadripolaire : la distribution peut être neutre et présenter également un moment dipolaire équivalent nul :  $\sum_i q_i = 0$ ,  $\sum_i q_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ . Dans ce cas, seul le terme quadripolaire peut contribuer :

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \sum_i \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta_i - 1) q_i r_i^2.$$

Cela se produit par exemple pour la molécule de dioxyde de carbone  $\text{CO}_2$  dans laquelle les deux liaisons carbonyle  $\text{C}=\text{O}$  sont polarisées mais colinéaires, de sorte que leurs moments dipolaires se compensent. Notant par exemple  $-q$  la charge portée par les oxygènes et  $+2q$  celle portée par le carbone, les moments dipolaires valent  $8.4 \times 10^{-30}$  Cm pour une longueur de liaison de  $d = 1.2$  Å, et le potentiel exprimé en choisissant des coordonnées polaires centrées sur le carbone vaut :  $\phi(r, \theta) = -\frac{qd^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}$ .

### Applications :

i) Effet quadripolaire dans les noyaux : dans un atome, à l'énergie électronique (termes cinétique et potentiel) obtenue par résolution de l'équation de Schrödinger, s'ajoutent différents termes, dont l'effet quadripolaire du noyau provenant de la distribution de charges électriques (protons) dans le noyau. Celle-ci, notée  $\rho_N(\mathbf{r})$  présente en général un centre de symétrie (les noyaux ont souvent la forme d'ellipsoïdes allongés) et est normalisée par la condition  $\int_N \rho_N(\mathbf{r}) d\tau = Z|q_e|$ . La distribution de charges nucléaires interagit avec le potentiel  $\phi_e(\mathbf{r})$  créé par le nuage électronique et obéissant à l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi_e(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_e(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

où la densité de charges associée à la distribution d'électrons est donnée par la mécanique quantique :

$$\rho_e(\mathbf{r}) = -|q_e| \sum_{\text{orbitales}} |\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi)|^2.$$

L'énergie d'interaction électrons-noyau est donnée par

$$U_{\text{es}} = \int_N \rho_N(\mathbf{r}) \phi_e(\mathbf{r}) d\tau$$

où le potentiel électronique peut être développé au voisinage de l'origine (sur le centre de symétrie du noyau) :

$$\phi_e(\mathbf{r}) = \phi_e(0) + \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial \phi_e}{\partial x_\alpha} \right)_0 x_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left( \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_0 x_\alpha x_\beta + \dots$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\text{es}} &= \phi_e(0) \int_N \rho_N(\mathbf{r}) \, d\tau \\ &+ \sum_{\alpha=1}^3 \left( \frac{\partial \phi_e}{\partial x_\alpha} \right)_0 \int_N \rho_N(\mathbf{r}) x_\alpha \, d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left( \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)_0 \int_N \rho_N(\mathbf{r}) x_\alpha x_\beta \, d\tau \\ &+ \dots \end{aligned}$$

où  $x_\alpha$  représente une composante de  $\mathbf{r}$ , par exemple  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  et  $x_3 = z$  en coordonnées cartésiennes. Si la distribution  $\rho_N(\mathbf{r})$  présente un centre de symétrie, ce que l'on suppose ici, à tout point  $x, y, z$  dans le noyau, il correspond un point  $-x, -y, -z$  de même densité de charges, de sorte que

$$\begin{aligned} \int_N \rho_N(\mathbf{r}) x_\alpha \, d\tau &= 0 \\ \int_N \rho_N(\mathbf{r}) x_\alpha x_\beta \, d\tau &= 0, \quad \text{pour } \alpha \neq \beta \end{aligned}$$

et il reste uniquement

$$\mathcal{U}_{\text{es}} = Z|q_e| \phi_e(0) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \underbrace{\left( \frac{\partial^2 \phi_e}{\partial x_\alpha^2} \right)_0}_{Q_\alpha} \underbrace{\int_N \rho_N(\mathbf{r}) x_\alpha^2 \, d\tau}_{D_\alpha}.$$

Le premier terme est purement monopolaire et correspond à l'interaction habituelle nuage électronique-noyau et le second est le terme quadripolaire. Dans le cas particulier où le noyau est à symétrie sphérique,  $D_\alpha = D$ ,  $\forall \alpha$  et  $\sum_{\alpha} Q_\alpha = (\Delta \phi_e)_0$ , soit

$$\mathcal{U}_{\text{es}} = Z|q_e| \phi_e(0) + \frac{1}{2} D (\Delta \phi_e)_0.$$

À titre d'illustration, considérons l'approximation d'une distribution uniforme de rayon  $R$  :  $\rho_N(\mathbf{r}) = \rho_0$ . La condition de normalisation impose  $\rho_0 = \frac{3Z|q_e|}{4\pi R^3}$  et  $D = \int_N x^2 \rho_0 \, d\tau = \frac{1}{3} \int_0^R r^2 \rho_0 4\pi r^2 \, dr = \frac{1}{5} Z|q_e| R^2$ . De plus  $(\Delta \phi_e)_0 = -\frac{\rho_e(0)}{\epsilon_0}$ , soit

$$\mathcal{U}_{\text{es}} = Z|q_e| \left( \phi_e(0) - \frac{1}{10} R^2 \frac{\rho_e(0)}{\epsilon_0} \right)$$

où toutes les orbitales contribuent pour le premier terme :

$$\phi_e(0) = -\frac{|q_e|}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{atome}} \frac{1}{r} \sum_{\text{orbitales}} |\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi)|^2 \, d\tau$$

et seules les orbitales  $s$ , dont la probabilité de présence est non nulle à l'origine, contribuent au second terme :

$$\rho_e(0) = -|q_e| \sum_{\text{orbitales } s} |\psi_{n00}(0)|^2.$$



On peut estimer les deux termes par des arguments dimensionnels. Pour un atome hydrogénoïde, le terme intégral est de l'ordre de  $\int_{\text{atome}} \frac{1}{r} \sum_{\text{orbitales}} |\psi_{n\ell m}(r, \theta, \varphi)|^2 d\tau \simeq \frac{1}{a_0}$  et le terme de densité  $-|q_e| \sum_{\text{orbitales}} |\psi_{n00}(0)|^2 \simeq -|q_e| \frac{1}{a_0^3}$ , de sorte qu'il vient

$$U_{\text{es}} \simeq \underbrace{-\frac{Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}}_{e^- \text{--noyau ponctuel}} + \underbrace{\frac{Zq_e^2 R^2}{10\epsilon_0 a_0^3}}_{e^- \text{--noyau étendu}} \simeq -\frac{Zq_e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left[ 1 - \frac{2\pi}{5} \left( \frac{R}{a_0} \right)^2 \right].$$

Le premier terme est d'ordre  $-25Z$  eV et le second  $10^8$  fois plus petit.

ii) Interactions dipôles-dipôles. Les molécules mettant en jeu des atomes de nature différente peuvent porter des moments dipolaires permanents lorsque les liaisons chimiques covalentes sont polarisées (HCl, H<sub>2</sub>O, CO, NH<sub>3</sub>, ...), ou des moments quadripolaires si les moments dipolaires se compensent (CO<sub>2</sub>). Les molécules homonucléaires ou les atomes en revanche ne portent pas de moment dipolaire permanent. Toutefois, sous l'action d'un champ électrique externe, il peut apparaître un moment dipolaire induit consécutif à la déformation du nuage électronique. On définit alors la polarisabilité  $\alpha$ , homogène à un volume, caractérisant la réponse du nuage électronique au champ :  $\mathbf{p} = \alpha\epsilon_0 \mathbf{E}$ . Les interactions entre dipôles permanents ou dipôles induits sont différentes. Entre dipôles permanents,  $\mathbf{p}_1$  et  $\mathbf{p}_2$ , on peut écrire le champ créé par  $\mathbf{p}_1$  au point où se trouve  $\mathbf{p}_2$  :

$$\mathbf{E}_1(2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} [3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_{12})\mathbf{u}_{12} - \mathbf{p}_1]$$

qui conduit à l'énergie d'interaction de Keesom

$$U = -\mathbf{p}_2 \mathbf{E}_1(2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^3} [\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{u}_{12})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_{12})] \sim \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^3}.$$

Cette énergie décroît relativement lentement avec la distance. L'interaction de Van der Waals en revanche caractérise l'interaction entre deux molécules non polaires, ou encore entre dipôles permanent et induit. Dans ce dernier cas par exemple,  $\mathbf{p}_1$  étant un dipôle permanent, il crée au point 2 le champ précédent en  $\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^3}$  qui induit un moment  $\mathbf{p}_2 = \alpha\epsilon_0 \mathbf{E}_1(2) \sim \frac{p\alpha}{r_{12}^3}$  sur la seconde molécule non polaire, de sorte que l'énergie d'interaction (de Van der Waals) est en  $\frac{p^2\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_{12}^6}$  et décroît extrêmement rapidement avec la distance.

## 4. Processus microscopiques de polarisation

### 4.1. Milieux non polaires

Dans les milieux non polaires, en l'absence de champ appliqué, il n'existe pas de moment dipolaire. Les charges liées à l'équilibre sont dans un minimum de potentiel et sont par conséquent maintenues par une force de rappel élastique à l'ordre le plus bas. L'application d'un champ provoque des déplacements de faible amplitude de ces charges liées, ce qui fait naître un moment dipolaire proportionnel au champ. La réponse linéaire du milieu à ce champ définit la polarisabilité :

$$\mathbf{p} = \alpha\epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{loc}}. \quad (3.24)$$

#### 4.1.1. Polarisation électronique induite

Le mécanisme de polarisation électronique concerne tous les atomes et molécules et présente une très faible inertie, puisque ce sont les mouvements électroniques qui sont en jeu. Cela signifie que la réponse dynamique en régime variable sera importante même à haute fréquence ( $10^{16} - 10^{17}$  Hz).

Considérons à titre d'exemple la polarisabilité de l'atome d'hydrogène. Sous l'effet du champ électrique local  $\mathbf{E}_{\text{loc}}$ , l'atome répond par l'apparition d'un moment dipolaire  $\mathbf{p} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{loc}}$ . On prendra soin de distinguer le champ local régnant sur l'atome du champ macroscopique moyen qui interviendra ultérieurement dans les équations de Maxwell. En mécanique quantique, on calculerait la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  perturbée en présence du champ <sup>(53)</sup>, puis on évaluerait le moment dipolaire induit dans la direction  $z$  du champ par la moyenne sur l'orbitale :

$$p_z = -|q_e| \langle z \rangle_\psi = -|q_e| \int \psi^*(\mathbf{r}) z \psi(\mathbf{r}) d\tau.$$

Pour les atomes hydrogénoïdes, on obtient

$$\alpha = 18\pi a_0^3 / Z^4,$$

proportionnel au volume atomique.

Un calcul classique simpliste permet de retrouver cet ordre de grandeur. On considère pour cela que le nuage électronique se déplace sans déformation sous l'action du champ local. Le proton doit se trouver en équilibre et la distance proton-centre de gravité des charges négatives,  $d$ , s'obtient en égalant les forces exercées sur celui-ci :

$$Z|q_e|E_{\text{loc}} = Z|q_e|E_{e^-},$$

où le champ dû au nuage électronique,  $E_{e^-}$ , se déduit du théorème de Gauss :  $4\pi d^2 E_{e^-} = \frac{1}{\varepsilon_0} Z|q_e| \frac{d^3}{a^3}$  si l'on approxime la distribution de charges électroniques par une sphère uniformément chargée de rayon  $a$ . On obtient

$$E_{\text{loc}} = E_{e^-} = \frac{Z|q_e|d}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

soit

$$p = Z|q_e|d = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_{\text{loc}}.$$

La polarisabilité électronique est donc de l'ordre de

$$\alpha_e = 4\pi a^3, \tag{3.25}$$

elle est proportionnelle au volume atomique.

#### Remarque :

On peut effectuer un calcul quantique plus précis en terme d'ordre de grandeur en écrivant que le nuage électronique est retenu au proton par une force de rappel élastique  $-kr$  où la constante de rappel  $k = m\omega_0^2$  définit la pulsation de résonance  $\omega_0$ . Sous l'action du champ local les deux forces interviennent et à l'équilibre  $m\omega_0^2 x_0 = -|q_e|E_{\text{loc}}$ . Le moment dipolaire induit par le champ est donc

$$p = -|q_e|x_0 = \frac{q_e^2}{m\omega_0^2} E_{\text{loc}}, \quad \text{soit} \quad \alpha_e = \frac{q_e^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^2}.$$

<sup>(53)</sup> Partant d'une fonction d'onde  $\psi_0(\mathbf{r})$  en champ nul, on utilise par exemple une méthode perturbative ou variationnelle pour évaluer la fonction d'onde sous champ :  $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \delta\psi(\mathbf{r})$ .

On estime la pulsation de résonance pour l'atome d'hydrogène à partir de la valeur de l'énergie d'ionisation  $V_i = \frac{1}{2} \frac{me^4}{\hbar^2} \sim \hbar\omega_0$ , d'où découle la polarisabilité

$$\alpha_e = 16\pi \left( \frac{\hbar^2}{me^2} \right)^3 = 16\pi a_0^3. \quad (3.26)$$

Pour un gaz constitué de  $N$  atomes par unité de volume, la polarisation totale s'écrit  $P = Np = N\alpha_e \varepsilon_0 E_{\text{loc}}$  et l'on définit la susceptibilité diélectrique  $\chi$  par  $P = \varepsilon_0 \chi E_{\text{loc}}$  <sup>(54)</sup>, soit  $\chi = N\alpha_e$ . On introduit également la constante diélectrique  $\kappa = 1 + \chi$  <sup>(55)</sup>. Dans les conditions normales 1 atm, 0°C, un gaz comporte de l'ordre de  $2.69 \times 10^{25}$  at.m<sup>-3</sup> <sup>(56)</sup> et la valeur attendue est de  $\kappa_{\text{théor.}} \simeq 1 + (2.69 \times 10^{25}) 16\pi (0.529 \times 10^{-10})^3 = 1.00020$ . Expérimentalement, on obtient  $\kappa_{\text{exp.}} = 1.00026$  en très bon accord. Pour l'atome d'hélium, en prenant une énergie d'ionisation de 24.5 eV, on trouve  $\kappa_{\text{théor.}} \simeq 1.000050$  à comparer à  $\kappa_{\text{exp.}} = 1.000068$ . Ce modèle explique donc très bien les valeurs des constantes diélectriques des gaz non polaires.

#### 4.1.2. Polarisation ionique induite

On considère un cristal ionique (assimilé à une chaîne unidimensionnelle ordonnée de charges alternées : ions positifs et négatifs) sans moment dipolaire spontané. Les ions  $A$  (positifs) sont à l'équilibre à égale distance de leurs voisins  $B$  (négatifs). En notant  $a$  la distance  $AB$ , on peut estimer la force de rappel élastique agissant sur un ion  $A$  déplacé d'une quantité  $x \ll a$  par rapport à sa position d'équilibre :

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(a-x)^2} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(a+x)^2} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \left[ \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{-2} \right] \simeq -\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a^3} x.$$

Sous l'action d'un champ local, les ions  $A$  prennent une position d'équilibre  $x_0$  déterminée par

$$qE_{\text{loc}} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a^3} x_0,$$

et le moment dipolaire induit correspondant vaut

$$p = qx_0 = \pi\varepsilon_0 a^3 E_{\text{loc}}$$

d'où l'on déduit la polarisabilité, proportionnelle au volume de la maille élémentaire :

$$\alpha_i = \pi a^3. \quad (3.27)$$

<sup>(54)</sup> Cette expression n'est valable que dans les milieux dilués. A densité élevée, la relation entre susceptibilité et polarisabilité se complique. Elle est donnée dans un cas plus général par la relation de Clausius-Mossotti.

<sup>(55)</sup> La constante diélectrique est également notée  $\varepsilon_r$ . Elle est indifféremment appelée constante diélectrique ou permittivité. On parle également de permittivité relative pour la distinguer de la permittivité absolue d'un milieu  $\varepsilon = \varepsilon_0 \kappa$ .

<sup>(56)</sup> Une mole dans ces conditions occupe un volume de 22.4 l, soit  $6.02 \times 10^{23} \times 10^3 / 22.4$  at.m<sup>-3</sup>.

### 4.1.3. Réponse dynamique

Au voisinage de leur position d'équilibre, les charges (électrons ou ions) sont soumises à une force de rappel  $F = -m\omega_0^2 x$ ,  $m$  étant la masse des porteurs de charges, ions ou électrons, et  $\omega_0$  la fréquence propre d'oscillation de ces charges au voisinage de l'équilibre. La pulsation propre est liée à la raideur de la liaison, elle-même déduite de la dérivée seconde du potentiel :

$$\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_{\text{éq.}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial x^2} \right)_{\text{éq.}} x^2 + \dots = \mathcal{V}_{\text{éq.}} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \dots$$

où  $x$  mesure l'écart à l'équilibre. Si les charges sont des ions, du fait de leur inertie plus importante que celle des électrons, la pulsation de résonance correspondante est bien plus faible que la résonance électronique. Sous l'effet d'un champ statique, l'équilibre est déplacé et régi par l'égalité des forces :  $m\omega_0^2 x_0^2 = qE_{\text{loc}}$ , de sorte que le moment dipolaire vaut

$$p = qx_0 = \frac{q^2}{m\omega_0^2} E_{\text{loc}} = \alpha \varepsilon_0 E_{\text{loc}}.$$

On obtient ainsi la polarisabilité statique

$$\alpha_{\text{st.}} = \frac{q^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^2}. \quad (3.28)$$

En régime forcé, c'est-à-dire sous l'action d'un champ électrique oscillant  $E_{\text{loc}}(t)$  produit par une onde, l'équation de la dynamique donne

$$m\ddot{x}(t) = -m\omega_0^2 x(t) + qE_{\text{loc}}(t),$$

soit, en multipliant par  $q$ ,

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \omega_0^2 p(t) = \frac{q^2}{m} E_{\text{loc}}(t).$$

En posant  $E_{\text{loc}}(t) = E_0 e^{i\omega t}$  et  $p(t) = p_0 e^{i\omega t}$ , on obtient

$$p_0 = \frac{q^2 E_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \varepsilon_0 \alpha(\omega) E_0$$

qui définit la polarisabilité en régime permanent

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_{\text{st.}}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{q^2}{\varepsilon_0 m\omega_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \quad (3.29)$$

C'est une expression qui présente une divergence à la résonance. La divergence est atténuée par l'existence de frottements dont on n'a pas tenu compte ici. Pour  $\omega < \omega_0$ , les charges oscillent en phase avec le champ et à haute fréquence elles sont en opposition de phase.

#### 4.1.4. Polarisation d'interface

La polarisation d'interface est un mécanisme de polarisation induite que l'on rencontre dans les matériaux composites formés de grains métalliques dans une matrice isolante ou faiblement conductrice. L'application d'un champ provoque le déplacement des charges libres des grains métalliques. La distribution de charges qui en résulte à la surface des grains permet d'assimiler ces derniers à des dipôles élémentaires qui polarisent le matériau. Supposons que les grains métalliques soient des sphères de rayons  $R$ , avec une distribution en taille par unité de volume  $n(R)$ , c'est-à-dire avec la normalisation  $\int n(R) dR = N$  sphères par unité de volume. Sous l'action du champ  $E$ , chaque sphère est porteuse d'une densité surfacique de charges de la forme  $\sigma_0 \cos \theta$  ( $\theta$  mesure l'orientation par rapport à la direction du champ) avec  $\sigma_0 = 3\pi\epsilon_0 E$ . Le moment dipolaire d'un grain est de la forme  $p \sim \sigma_0 R^2 \times R = 3\pi\epsilon_0 R^3 E$ , d'où l'on déduit la polarisabilité  $\alpha = 3\pi R^3$ . La polarisation par unité de volume s'obtient en sommant sur la distribution  $n(R)$  :

$$P \sim 3\pi\epsilon_0 E \int R^3 n(R) dR.$$

L'expression finale dépend fortement de l'homogénéité de la distribution des grains (en forme et en taille) dans la matrice.

## 4.2. Milieux polaires

Dans les milieux polaires, il existe à l'échelle microscopique des moments dipolaires spontanés dont la résultante est généralement nulle par symétrie ou en raison d'un désordre d'orientation. L'application d'un champ externe a pour effet de favoriser les orientations colinéaires au champ qui minimisent l'énergie potentielle du système. La température en revanche introduit une tendance au désordre par agitation thermique. Ces deux effets concurrents conduisent à une réponse du milieu (polarisabilité) qui dépend de la température.

### 4.2.1. Polarisation d'orientation dans les fluides

Le mécanisme de polarisation d'orientation dans les fluides concerne les milieux désordonnés polaires, c'est-à-dire essentiellement les gaz et les liquides constitués de molécules portant des moments dipolaires permanents, supposés tous identiques et sans interaction. Plongées dans un champ extérieur  $\mathbf{E}$ , ces molécules subissent l'action d'un champ local  $\mathbf{E}_{\text{loc}}$ , proche de  $\mathbf{E}$  pour un milieu de faible densité (approximation des milieux dilués que nous avons déjà utilisée pour les gaz non polaires).

Sous l'effet de  $\mathbf{E}_{\text{loc}}$ , chaque dipôle tend à s'orienter dans le sens du champ par interaction potentielle  $U = -\mathbf{p}\mathbf{E}_{\text{loc}}$ <sup>(57)</sup>. Cette tendance est contrariée par l'agitation thermique qui désordonne les dipôles. Entre ces deux effets compétitifs, le système à l'équilibre minimise son énergie libre  $F = U - TS$ . On peut en rendre compte au moyen de la statistique de Maxwell-Boltzmann : la probabilité pour qu'un dipôle donné pointe dans la direction  $\theta$  par rapport au champ est proportionnelle au facteur de Boltzmann  $\exp(-U(\theta)/k_B T)$  :

$$\text{Pr}(\theta) = A e^{p E_{\text{loc}} \cos \theta / k_B T}.$$

La probabilité pour que ce dipôle soit orienté entre les directions  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  est donc<sup>(58)</sup>  $\text{Pr}(\theta) d\Omega = 2\pi \sin \theta \text{Pr}(\theta) d\theta$ . Elle doit être normée, de sorte que

$$\int_0^\pi 2\pi \sin \theta \text{Pr}(\theta) d\theta = 1$$

<sup>(57)</sup> Dans ce modèle simplifié, on néglige les interactions entre moments dipolaires.

<sup>(58)</sup> Il y a une symétrie cylindrique autour de la direction du champ.

détermine la constante  $A$ .

$$A^{-1} = -2\pi \int_0^\pi d(\cos \theta) e^{\xi \cos \theta} = \frac{4\pi}{\xi} \sinh \xi, \quad \xi = \frac{pE_{\text{loc}}}{k_B T}.$$

Le moment dipolaire moyen est alors donné par

$$\langle p_z \rangle = \int_0^\pi \underbrace{p \cos \theta}_{p_z} \Pr(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Cette quantité se calcule en réintroduisant l'expression intégrale de la constante  $A$  :

$$\langle p_z \rangle = \frac{\int_0^\pi p \cos \theta e^{\xi \cos \theta} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{\xi \cos \theta} \sin \theta d\theta} = \frac{N}{D}$$

en remarquant que  $\frac{\partial D}{\partial \xi} = \frac{1}{p} N$ , soit

$$\langle p_z \rangle = p \frac{\partial}{\partial \xi} (\ln D) = p \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \ln \frac{4\pi}{\xi} + \ln \sinh \xi \right],$$

soit

$$\langle p_z \rangle = p \left[ \coth \left( \frac{pE_{\text{loc}}}{k_B T} \right) - \frac{k_B T}{pE_{\text{loc}}} \right] = p \mathcal{L} \left( \frac{pE_{\text{loc}}}{k_B T} \right). \quad (3.30)$$

$\mathcal{L}(\xi)$  est la fonction de Langevin. En champ faible, on peut linéariser la fonction de Langevin :  $\coth \xi \sim 1/\xi + \xi/3$ , soit  $\mathcal{L}(\xi) \sim \xi/3$  ce qui conduit à une variation linéaire du moment dipolaire moyen avec le champ :  $\langle p_z \rangle \sim \frac{p^2}{3k_B T} E_{\text{loc}}^{(59)}$  qui permet d'identifier la polarisabilité d'orientation due aux dipôles permanents

$$\alpha_d = \frac{p^2}{3\varepsilon_0 k_B T}. \quad (3.31)$$

### Remarques :

i) Ce processus joue un très grand rôle pour les propriétés diélectriques des composés macromoléculaires.

ii) Contrairement à la polarisabilité électronique, la polarisabilité d'orientation dépend fortement de la température.

iii) En raison de l'inertie des molécules, bien plus importante que celle des électrons, la polarisabilité d'orientation intervient en régime variable à des fréquences plus faibles que la polarisabilité électronique. De plus, les interactions entre molécules produisent de fortes dissipations d'énergie.

iv) Finalement, rappelons que ce mécanisme ne peut se produire que dans les milieux polaires, c'est-à-dire dont les molécules portent un moment dipolaire permanent.

<sup>(59)</sup> Ce résultat peut se retrouver facilement en utilisant une approximation. Avec les ordres de grandeur  $p \simeq 10^{-29}$  C.m et  $E \simeq 10^5$  V.m<sup>-1</sup>, on voit qu'à température ordinaire,  $T \simeq 300$  K,  $\xi \simeq 2.4 \times 10^{-4}$ , de sorte que  $e^{\xi \cos \theta} \sim 1 + \xi \cos \theta$ . Le moment moyen s'écrit alors

$$\langle p_z \rangle = \frac{\int_0^\pi p \cos \theta (1 + \xi \cos \theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi (1 + \xi \cos \theta) \sin \theta d\theta} = \frac{p\xi \left[ \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi}{[\cos \theta]_0^\pi} = p\xi/3.$$

### 4.2.2. Polarisation d'orientation dans les cristaux ioniques

Certains cristaux ioniques, constitués d'empilements ordonnés de charges alternées (ions positifs et négatifs), peuvent exister dans des configurations telles qu'il existe deux positions d'équilibre stable, conduisant à l'existence de moments dipolaires non nuls entre premiers voisins. Considérons le cas d'une chaîne unidimensionnelle d'ions  $A$  et  $B$ , respectivement positifs et négatifs. Nous allons supposer les ions  $B$  fixes et raisonner sur les ions  $A$ . Si les ions  $A$  étaient situés à égale distance de leurs deux voisins  $B$ , comme c'est généralement le cas pour les cristaux ioniques, les moments dipolaires seraient nuls par symétrie. En revanche, dans certains composés ioniques, les ions  $A$  ont deux positions d'équilibre, légèrement plus proches de l'un des deux voisins. Cette situation s'accompagne d'un moment dipolaire non nul, orienté vers la position de l'ion  $A$ , c'est-à-dire que les moments sont opposés dans les deux configurations d'équilibre également stables. L'application d'un champ  $E_{\text{loc}}$  le long de la chaîne favorise l'orientation parallèle. On a affaire à un système à deux états dont le moment dipolaire moyen se déduit des probabilités associées à chacune des configurations notées  $+$  et  $-$ , assorties d'une contrainte de normation :

$$\text{Pr}_{\pm} = Ae^{pE_{\text{loc}}/k_B T}, \quad \sum_{\pm} \text{Pr}_{\pm} = 1 = 2A \cosh\left(\frac{pE_{\text{loc}}}{k_B T}\right).$$

On a donc

$$\langle p_z \rangle = \sum_{\pm} \pm p \text{Pr}_{\pm} = p \tanh\left(\frac{pE_{\text{loc}}}{k_B T}\right). \quad (3.32)$$

En champ faible, on peut linéariser  $\tanh(pE_{\text{loc}}/k_B T) \sim pE_{\text{loc}}/k_B T$  ce qui conduit à l'expression de la polarisabilité :

$$\alpha_d = \frac{p^2}{\varepsilon_0 k_B T}. \quad (3.33)$$

On obtient à nouveau une expression proportionnelle à l'inverse de la température.

## 5. Approche macroscopique de l'électromagnétisme dans les milieux diélectriques

### 5.1. Champ de polarisation, champs macroscopique et microscopique, champ local, polarisation

Pour permettre une description macroscopique des propriétés des milieux diélectriques, on est amené à introduire plusieurs échelles d'analyse, du microscopique au macroscopique. Les champs ont des significations très différentes à ces diverses échelles de longueur.

Le champ appliqué, ou champ dû à des charges excitatrices  $\rho_{\text{exc}}$  externes, imposées par les conditions expérimentales, est noté  $\mathbf{E}_{\text{exc}}$ . Il obéit à l'équation de Maxwell

$$\text{div } \mathbf{E}_{\text{exc}} = \frac{\rho_{\text{exc}}}{\varepsilon_0}. \quad (3.34)$$

Ce champ est créé de l'extérieur, mais il est néanmoins généralement perturbé par le milieu diélectrique car il diffère de la valeur  $\mathbf{E}_{\text{exc}}^0$  qu'il aurait dans le vide.

Ce phénomène est dû à une redistribution des charges excitatrices provoquée par l'introduction du milieu diélectrique.

Le champ microscopique  $\mathbf{e}_\mu$  agit à l'échelle des atomes et des molécules. C'est une quantité dont les variations temporelles et spatiales sont très rapides en raison des variations très importantes de densité locale de charges et de mobilité des porteurs de charge à cette échelle. Ce champ n'est pas utilisable pour une description des propriétés macroscopiques.

Le champ local  $\mathbf{E}_{\text{loc}}$  est défini à une échelle de longueur intermédiaire. L'inconvénient du champ microscopique provient de ses variations trop rapides qui invalident les approximations d'uniformité à l'échelle des atomes et des molécules qui nous ont permis d'introduire la réponse du milieu en termes de polarisabilité. Si l'on effectue une moyenne (temporelle et spatiale) du champ microscopique à l'échelle de quelques distances interatomiques, on obtient le champ local pour lequel ces approximations sont valables.

Le champ de polarisation (ou champ dépolarisant),  $\mathbf{E}_{\text{pol}}$ , est dû à la polarisation totale d'un matériau diélectrique à l'échelle macroscopique, que cette polarisation résulte d'un mécanisme induit ou de la réorientation de dipôles permanents. La polarisation totale est donnée par le moment dipolaire par unité de volume, elle est de la forme  $\mathbf{P} = N\langle\mathbf{p}\rangle$ . Par analogie avec l'équation de Maxwell pour le champ exciteur, on peut formellement définir une densité volumique de charges de polarisation  $\rho_{\text{pol}}$  telle que

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{\text{pol}} = \frac{\rho_{\text{pol}}}{\varepsilon_0}. \quad (3.35)$$

Il s'agit d'un intermédiaire de calcul sans réalité en terme de charges libres qui est uniquement dû à l'existence d'une polarisation macroscopique <sup>(60)</sup>. On parle souvent de charges fictives ou de charges liées, car elles représentent un effet dipolaire lui-même associé à de véritables charges liées à l'échelle microscopique.

Le champ moyen ou champ électromagnétique <sup>(61)</sup>, noté  $\mathbf{E}$ , est donné par

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{exc}} + \mathbf{E}_{\text{pol}}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{exc}} + \rho_{\text{pol}}}{\varepsilon_0}. \quad (3.36)$$

Il a une signification macroscopique également.

La réponse d'un milieu diélectrique à l'existence d'un champ électrique dépend également de l'échelle de description. On admet en général que ces réponses sont linéaires. Dans une approche locale, on a défini la réponse des atomes et molécules par la polarisabilité

$$\langle\mathbf{p}\rangle = \alpha\varepsilon_0\mathbf{E}_{\text{loc}} \quad (3.37)$$

qu'il faut comprendre comme le premier terme d'un développement pouvant comporter des termes non linéaires. En effet, l'observation expérimentale de milieux ne possédant pas en moyenne de moment dipolaire microscopique en l'absence de champ,  $\langle\mathbf{p}(0)\rangle = \mathbf{0}$ , mais qui présentent en revanche un moment moyen non nul sous champ,  $\langle\mathbf{p}(\mathbf{E}_{\text{loc}})\rangle \neq \mathbf{0}$ , amène à poser de manière générale que le moment dipolaire est une fonction du champ local,  $\langle\mathbf{p}(\mathbf{E}_{\text{loc}})\rangle = \sum_{i=1}^3 f_i(\mathbf{E}_{\text{loc}})\mathbf{u}_i$ . La définition de la polarisabilité repose sur le terme du premier ordre du développement de Taylor de  $f$  :

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{p}(\mathbf{E}_{\text{loc}})\rangle &= \sum_{i=1}^3 f_i(\mathbf{E}_{\text{loc}})\mathbf{u}_i \\ &= \mathbf{0} + \sum_{i=1}^3 [(\nabla f_i)_0 \cdot \mathbf{E}_{\text{loc}}]\mathbf{u}_i + \dots \\ &= \varepsilon_0[\alpha_{ij}]\mathbf{E}_{\text{loc}} + \dots \end{aligned}$$

<sup>(60)</sup> Le milieu étant traité comme un milieu continu.

<sup>(61)</sup> Ce champ est celui qui interviendra dans les équations de Maxwell.



où  $[\alpha_{ij}] = (\nabla f_i)_0 \cdot \mathbf{u}_i$ . On constate que la forme générale de la polarisabilité  $[\alpha_{ij}]$  est un tenseur de rang 2. Les cas envisagés précédemment reposaient implicitement sur une polarisabilité scalaire comme on en rencontre si le milieu présente une symétrie sphérique moyenne.

A l'échelle macroscopique, la réponse du milieu est la polarisation  $\mathbf{P}$ , elle est mesurée par la susceptibilité diélectrique  $\chi$ . Celle-ci est définie par rapport au champ moyen et soumise aux mêmes prescriptions limitatives que la polarisabilité <sup>(62)</sup> :

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}. \quad (3.38)$$

En combinant les réponses à ces deux échelles et avec  $N$  dipôles par unité de volume, on a

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = N \langle \mathbf{p} \rangle = N \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}_{\text{loc}}. \quad (3.39)$$

On constate qu'une relation entre champ local et champ moyen est indispensable pour passer des propriétés microscopiques aux propriétés macroscopiques. Dans les milieux dilués (gaz), on peut généralement supposer que le champ local diffère peu du champ moyen, de sorte qu'il y a simplement proportionnalité entre susceptibilité et polarisabilité :  $\chi = N\alpha$ .

## 5.2. Champ de Lorentz

L'expression  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{exc}} + \mathbf{E}_{\text{pol}}$  est macroscopique et concerne des grandeurs moyennées. Au niveau microscopique <sup>(63)</sup>, le diélectrique est uniquement constitué de dipôles qui créent un champ

$$\mathbf{E}_{\text{dip}} = \sum_{\text{dipôles}} \mathbf{e}_{\text{dip}},$$

de sorte que le champ local s'écrit

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E}_{\text{exc}} + \mathbf{E}_{\text{dip}}.$$

Toute la difficulté consiste à passer de l'échelle locale à celle de l'échantillon pour trouver une relation entre  $\mathbf{E}_{\text{dip}}$  et  $\mathbf{E}_{\text{pol}}$ . On utilise pour cela la méthode de Lorentz qui permet l'évaluation du champ local dans certains cas simples <sup>(64)</sup>. Faisant abstraction du champ d'excitation, le champ total est donc donné, par définition même du milieu diélectrique, par  $\mathbf{E}_{\text{dip}}$ . Pour calculer le champ local en un point  $P$  du diélectrique, supposons que l'on creuse, autour de ce point, une cavité, appelée sphère de Lorentz  $\mathcal{S}$ , de taille importante devant les distances interatomiques, mais suffisamment petite par rapport à l'échantillon lui-même. Si la cavité est petite, la description macroscopique par le champ de polarisation convient à l'extérieur de la sphère de Lorentz, et la valeur de  $\mathbf{E}_{\text{pol}}$  ne diffère pas sensiblement de celle qu'elle prendrait en l'absence de cavité. Pour l'intérieur de la cavité, celle-ci étant maintenant vide de dipôles, il apparaît en surface des charges de polarisation qui créent au point  $P$  un champ appelé champ de Lorentz  $\mathbf{E}_{\text{Lorentz}}$  et qui se calcule en principe également à l'aide des relations macroscopiques. En vertu du théorème de superposition, il reste à tenir compte des dipôles qui ont été retirés de la sphère de Lorentz et dont la contribution est donnée par  $\sum_{\text{dipôles} \in \mathcal{S}} \mathbf{e}_{\text{dip}}$ . A l'intérieur de la cavité, la description macroscopique n'est plus permise. On a donc

$$\mathbf{E}_{\text{dip}} = \mathbf{E}_{\text{pol}} + \mathbf{E}_{\text{Lorentz}} + \sum_{\text{dipôles} \in \mathcal{S}} \mathbf{e}_{\text{dip}}.$$

<sup>(62)</sup> Ce qui signifie que, dans le cas général, la susceptibilité diélectrique est également un tenseur de rang 2 :  $[\chi_{ij}]$ .

<sup>(63)</sup> On se place ici à l'échelle intermédiaire où le concept de champ local prend un sens.

<sup>(64)</sup> Cette méthode s'applique aux milieux polarisables non polaires.

On a alors

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E}_{\text{exc}} + \mathbf{E}_{\text{pol}} + \mathbf{E}_{\text{Lorentz}} + \sum_{\text{dipôles} \in \mathcal{S}} \mathbf{e}_{\text{dip}} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{Lorentz}} + \sum_{\text{dipôles} \in \mathcal{S}} \mathbf{e}_{\text{dip}}.$$

Ces relations ne sont utiles que si  $\mathbf{E}_{\text{Lorentz}}$  et  $\sum_{\text{dipôles} \in \mathcal{S}} \mathbf{e}_{\text{dip}}$  sont calculables. Pour un milieu polarisé quelconque, de polarisation moyenne <sup>(65)</sup>  $\mathbf{P}$ , le champ de polarisation à l'intérieur du milieu est opposé à la polarisation. Pour des raisons dimensionnelles il est alors nécessairement de la forme

$$\mathbf{E}_{\text{pol}} = -\lambda \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0},$$

où  $\lambda$  est une constante géométrique sans dimension <sup>(66)</sup>. Le champ de Lorentz est de la même forme, mais orienté dans le sens de  $\mathbf{P}$ , puisque la cavité représente une partie extérieure au milieu matériel :

$$\mathbf{E}_{\text{Lorentz}} = +\lambda_L \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}.$$

Le dernier terme ne prend d'expression simple que dans certains cas particuliers, comme le cas d'un diélectrique à symétrie cubique dont les dipôles sont tous rigoureusement colinéaires. Dans ce cas, la somme des contributions des champs dipolaires s'annule au centre de la sphère de Lorentz <sup>(67)</sup>. Le même résultat est valable si les dipôles sont totalement désordonnés. Dans ces conditions, la relation entre champ local et champ moyen est de la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{loc}} &= \mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{Lorentz}} \\ &= \mathbf{E}_{\text{exc}} - \lambda \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} + \lambda_L \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \\ &= \mathbf{E} + \lambda_L \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

On verra que l'on a simplement  $\lambda_L = 1/3$ .

### 5.3. Milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes

De nombreux matériaux diélectriques réels sont correctement représentés par l'approximation des milieux diélectriques linéaires, homogènes et isotropes. La linéarité impose une relation de proportionnalité (éventuellement sous forme tensorielle) entre polarisation et champ moyen et définit la susceptibilité diélectrique. L'homogénéité est

<sup>(65)</sup> Il s'agit d'une moyenne spatiale sur le volume du diélectrique.

<sup>(66)</sup> On suppose ici implicitement que le milieu est parfaitement isotrope.

<sup>(67)</sup> Si tous les dipôles, de même moment  $p$ , sont par exemple orientés parallèlement à un axe  $Oz$ , la somme de leurs contributions au centre de la sphère vaut

$$\sum_{\text{dipôles} \in \mathcal{S}} \mathbf{e}_{\text{dip}} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{3z_i^2 - r_i^2}{r_i^5} \mathbf{u}_z = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{2z_i^2 - x_i^2 - y_i^2}{r_i^5} \mathbf{u}_z$$

et comme  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont équivalents,  $\sum_i \frac{z_i^2}{4\pi\varepsilon_0 r_i^5} = \sum_i \frac{x_i^2}{4\pi\varepsilon_0 r_i^5} = \sum_i \frac{y_i^2}{4\pi\varepsilon_0 r_i^5}$ , ce qui montre que pour un site atomique ayant un environnement cubique dans une cavité sphérique, le champ des dipôles internes à  $\mathcal{S}$  est nul.

associée à l'invariance par translation dans le milieu et signifie que  $\chi$  a même valeur en tout point du milieu. L'isotropie enfin, associée à l'invariance par rotation, requiert que les propriétés physiques soient les mêmes dans toutes les directions, c'est-à-dire que  $\chi$  est scalaire. On dispose donc de la relation suivante

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E},$$

où  $\chi$  est un réel positif. On définit le déplacement électrique

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.41)$$

qui peut s'écrire sous des formes diverses :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (3.42)$$

Dans ces expressions,  $\kappa = 1 + \chi$  est la permittivité diélectrique relative ou constante diélectrique et  $\varepsilon$  la permittivité diélectrique. L'indice de réfraction est lié à la permittivité, puisque l'on a

$$n = \sqrt{\kappa} = \sqrt{1 + \chi}. \quad (3.43)$$

## 5.4. Charges de polarisation

Considérons un diélectrique cristallin de forme cubique, supposé uniformément polarisé. Cette polarisation résulte des dipôles élémentaires placés aux nœuds du réseau cristallin de sorte que les charges opposées de deux dipôles voisins se compensent. Il reste l'effet des charges les plus externes des dipôles situés en surface, dont l'effet est analogue à celui que produirait une distribution surfacique de charges égale à la polarisation. D'un point de vue dimensionnel, cette observation est correcte, puisque  $[E] = [P]/[\varepsilon_0]$  <sup>(68)</sup> et  $[E] = [\sigma]/[\varepsilon_0][r^2]$  prouve que la polarisation est homogène à une densité surfacique de charges. Si la polarisation n'est pas uniforme, il doit apparaître des charges de polarisation de volume.

Pour donner une démonstration et une expression générale de ces résultats, considérons un élément de volume  $d\tau$  de matière polarisée, de sorte que le moment dipolaire équivalent vaut  $d\mathbf{p} = \mathbf{P}(1) d\tau$ . En notant  $\mathbf{r}_1$  la distance du point 1 à une origine arbitraire, et  $\mathbf{r}_2$  pour repérer un point d'observation, le potentiel créé à grande distance par  $d\mathbf{p}$  s'écrit

$$d\phi_{\text{pol}} = \frac{d\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_{12}}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}.$$

En utilisant

$$\frac{\mathbf{u}_{12}}{r_{12}^2} = \underbrace{-\nabla_2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right)}_{\text{variation de } \mathbf{r}_2} = \underbrace{+\nabla_1 \left( \frac{1}{r_{12}} \right)}_{\text{variation de } \mathbf{r}_1}$$

on peut écrire  $d\phi_{\text{pol}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \mathbf{P}(1) d\tau \nabla_1 \left( \frac{1}{r_{12}} \right)$  que l'on transforme en deux termes grâce à l'expression  $\text{div} \left( \frac{\mathbf{P}(1)}{r_{12}} \right) = \frac{1}{r_{12}} \text{div} \mathbf{P}(1) + \mathbf{P}(1) \nabla \left( \frac{1}{r_{12}} \right)$ . L'intégration sur le volume  $\Omega$  du diélectrique fournit finalement un terme de volume et un terme de surface :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{pol}}(2) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \int_{\Omega} \text{div} \left( \frac{\mathbf{P}(1)}{r_{12}} \right) d\tau - \int_{\Omega} \frac{1}{r_{12}} \text{div} \mathbf{P}(1) d\tau \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \oint_{\Sigma(\Omega)} \frac{\mathbf{P}(1) d\mathbf{S}}{r_{12}} - \int_{\Omega} \frac{1}{r_{12}} \text{div} \mathbf{P}(1) d\tau \right]. \end{aligned}$$

<sup>(68)</sup> On peut aussi noter  $[P] = [N][qd]$ .

En interprétant le premier terme comme le potentiel dû à une distribution surfacique de charges et le second comme une distribution volumique, on arrive à l'expression des charges de polarisation en fonction de la polarisation :

$$\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad \rho_{\text{pol}} = -\text{div } \mathbf{P}. \quad (3.44)$$

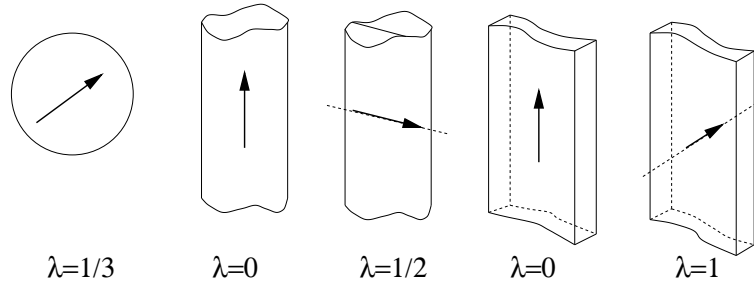
Ces expressions sont très utiles pour le calcul des propriétés macroscopiques, en particulier le champ de polarisation

$$\mathbf{E}_{\text{pol}} = -\text{grad } \phi_{\text{pol}}. \quad (3.45)$$

Il faut toutefois noter que cela présuppose que la polarisation du milieu est connue. En général on retient l'approximation d'une polarisation uniforme. Dans ce cas, seule la densité surfacique apparaît et le champ de polarisation est simplement donné par

$$\mathbf{E}_{\text{pol}} = -\lambda \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \quad (3.46)$$

où  $\lambda$  est un facteur géométrique adimensionnel. Pour des géométries standard, sphère, cylindre infini, plaque infinie d'épaisseur finie, on obtient les valeurs suivantes :



### Remarques :

i) On peut noter que l'expression des charges de polarisation repose sur l'utilisation du potentiel dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire dans l'approximation à grande distance. Comme le champ de polarisation est une quantité macroscopique moyennée sur un volume grand devant les distances interatomiques, cette approximation est légitime.

ii) Dans le cas où la polarisation est uniforme, il apparaît une simplification très utile qui permet de calculer le potentiel de polarisation par utilisation du théorème de Gauss dans les cas de géométries classiques. On peut effectivement sortir  $\mathbf{P}(1)$  de l'intégrale et écrire directement

$$\phi_{\text{pol}} = \mathbf{P}(1) \cdot \int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}_{12}}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2} d\tau = \mathbf{P}(1) \cdot \mathbf{E}_{\rho=1},$$

où l'on reconnaît le champ auxiliaire  $\mathbf{E}_{\rho=1}$ , le champ électrostatique créé par une distribution de charges unité de même symétrie que le milieu diélectrique étudié. Considérons par exemple une sphère uniformément polarisée et calculons le champ de polarisation en tout point, intérieur ou extérieur. Le champ électrostatique créé par une sphère portant une charge  $Q$  uniformément répartie en volume vaut

$$E_{\rho=1}^< = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{r}{3\varepsilon_0}, \quad E_{\rho=1}^> = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

avec une densité unité  $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 1$ . On en déduit le potentiel  $\phi_{\text{pol}}(r, \theta) = P E_{\rho=1}(r) \underbrace{\mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_r}_{\cos \theta}$ , soit

$$\phi_{\text{pol}}^<(r, \theta) = \frac{Pr \cos \theta}{3\varepsilon_0}, \quad \phi_{\text{pol}}^>(r, \theta) = \frac{PR^3 \cos \theta}{3\varepsilon_0 r^2}.$$

A l'intérieur de la sphère, le potentiel correspond à un champ de polarisation uniforme  $\mathbf{E}_{\text{pol}}^< = -\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$ , alors qu'à l'extérieur il a une expression dipolaire équivalente à celle d'un dipôle correspondant au moment dipolaire total  $\mathbf{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{P}$ .

### 5.5. Courants de polarisation

En régime variable, la polarisation dépend du temps, ce qui conduit également à une variation temporelle des charges de polarisation. Supposons par exemple que la polarisation varie de  $P(t)$  à  $P(t) + dP$  pendant le temps  $dt$ . La charge élémentaire de surface varie alors de  $P_n(t) dS$ , ce qui correspond à un courant  $j dS = dQ/dt$ , soit  $j = dP/dt$ . En régime variable on doit donc tenir compte du courant de polarisation. On peut en donner une démonstration plus précise en considérant un volume quelconque  $\Omega$  limité par une surface  $\Sigma(\Omega)$ . La vitesse à laquelle la charge de polarisation traverse  $\Sigma(\Omega)$  doit être égale à la vitesse à laquelle diminue la charge de polarisation dans  $\Omega$  :

$$\int_{\Sigma(\Omega)} \mathbf{j}_{\text{pol}} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho_{\text{pol}} d\tau,$$

soit, en appliquant le théorème de la divergence,

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{j}_{\text{pol}} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{P} d\tau = \int_{\Omega} \text{div } \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} d\tau,$$

d'où l'on déduit le courant de polarisation :

$$\mathbf{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (3.47)$$

### 5.6. Equations de Maxwell dans les milieux diélectriques

Lorsque l'on prend en compte les charges et les courants de polarisation, les équations de Maxwell comprennent des termes nouveaux. On s'intéresse ici à un milieu diélectrique (non magnétique) linéaire, homogène et isotrope.

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left( \underbrace{\mathbf{j}_{\text{tot}}}_{\text{courant conduction}} + \underbrace{\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}_{\text{courant déplacement}} \right)$$

où  $\mathbf{j}_{\text{tot}} = \mathbf{j}_{\text{exc}} + \mathbf{j}_{\text{pol}} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ . On suppose ici que le milieu est peu conducteur, de sorte qu'il existe une faible conductivité  $\sigma$ . On obtient alors en utilisant  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left( \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right). \quad (3.48)$$

De même,  $\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{exc}} + \rho_{\text{pol}})$  peut s'écrire

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{exc}} \quad (3.49)$$

alors que les deux dernières restent inchangées :

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (3.50)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3.51)$$

**Remarques :**

i) Propagation de la lumière dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope. On peut combiner les équations de Maxwell pour obtenir l'équation de propagation pour le champ magnétique par exemple :

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \underbrace{\text{grad div } \mathbf{B}}_{\text{nul}} - \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{D}.$$

En utilisant la définition de la permittivité, il vient

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{\kappa}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

La vitesse effective <sup>(69)</sup> de l'onde dans le milieu est  $v$  telle que  $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\kappa}}$ . Cela définit l'indice de réfraction  $n$  du milieu diélectrique.

ii) Relation de dispersion d'une onde plane. Si l'on cherche des solutions de l'équation des ondes de la forme  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ , on a  $\Delta \mathbf{B} = -k^2 \mathbf{B}$ ,  $\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{B}$ , soit

$$\omega = \frac{ck}{n}.$$

Au voisinage des résonances,  $\kappa$  peut devenir négatif, ce qui correspond à un vecteur d'onde imaginaire pur, c'est-à-dire à une onde évanescente qui ne se propage pas dans le volume du diélectrique. Ce phénomène est caractéristique de l'absorption.

**5.7. Equation de Laplace et milieux diélectriques**

En régime statique  $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , ce qui implique que le champ moyen dérive d'un potentiel scalaire,  $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi_{\text{tot}}$ . On a également  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{exc}} + \mathbf{E}_{\text{pol}}$  avec  $\mathbf{E}_{\text{exc}} = -\text{grad } \phi_{\text{exc}}$  et  $\mathbf{E}_{\text{pol}} = -\text{grad } \phi_{\text{pol}}$ , le potentiel scalaire total se décompose ainsi en un terme dû aux charges d'excitation et un terme dû aux charges de polarisation :  $\phi_{\text{tot}} = \phi_{\text{exc}} + \phi_{\text{pol}}$ . Par ailleurs  $\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{exc}} + \rho_{\text{pol}})$  ce qui conduit à l'équation de Poisson pour le potentiel total :

$$\Delta \phi_{\text{tot}} = \Delta \phi_{\text{exc}} + \Delta \phi_{\text{pol}} = -\frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_{\text{exc}} + \rho_{\text{pol}}). \quad (3.52)$$

Dans un milieu uniformément polarisé, la densité volumique de charges de polarisation est nulle et le potentiel de polarisation obéit à l'équation de Laplace. La résolution est évidemment analogue au cas des milieux conducteurs, seules les conditions aux limites sont changées.

**Exemples :**

i) Champ dans une cavité vide :

Considérons l'exemple d'une cavité sphérique de rayon  $a$  creusée dans un milieu diélectrique infini supposé uniformément polarisé sous l'effet d'un champ exciteur uniforme  $\mathbf{E}_{\text{exc}} = E_0 \mathbf{u}_z$  de sorte qu'il règne dans le milieu à grande distance un champ moyen  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{exc}} + \mathbf{E}_{\text{pol}} = E \mathbf{u}_z$ . Le potentiel à grande distance est de la forme  $\phi(r, \theta) = -Er \cos \theta$  (la référence de potentiel nul arbitraire est choisie au centre de la sphère). Le problème présente une symétrie de révolution autour du champ exciteur,

<sup>(69)</sup> On peut parler de vitesse effective car en fait la lumière se propage toujours à la vitesse  $c$ , mais ce sont les effets de diffusions multiples sur les atomes qui produisent un retard.

la solution générale de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques est donc de la forme

$$\phi_{\text{tot}}(r, \theta) = -Er \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta).$$

On exclut une divergence du potentiel dans la cavité vide, soit

$$r < a : \quad B_{\ell} = 0 \quad \forall \ell, \quad \phi_{\text{tot}}^{\leq}(r, \theta) = -Er \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta).$$

On peut d'ailleurs noter que  $A_0$  est nul aussi en raison du choix de zéro des potentiels. A l'infini l'influence de la sphère ne doit pas se faire sentir. Comme les charges de polarisation sont limitées à la paroi de la cavité, à grande distance le potentiel total se réduit au potentiel d'excitation et il reste pour le potentiel associé au champ moyen :

$$r > a : \quad A'_{\ell} = 0 \quad \forall \ell, \quad \phi_{\text{tot}}^{\geq}(r, \theta) = -Er \cos \theta + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B'_{\ell}}{r^{\ell+1}} P_{\ell}(\cos \theta).$$

Le potentiel est une fonction continue, soit

$$\phi_{\text{tot}}^{\leq}(a, \theta) = \phi_{\text{tot}}^{\geq}(a, \theta).$$

Cette condition est équivalente à la condition de continuité de la composante tangentielle du champ moyen,  $(\mathbf{E}^{\geq} - \mathbf{E}^{\leq}) \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$ , ( $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ), qui est assurée par la continuité de la composante tangentielle du champ exciteur et du champ de polarisation (tous deux satisfont à  $\mathbf{rot} \mathbf{E}_{\text{exc}} = \mathbf{rot} \mathbf{E}_{\text{pol}} = \mathbf{0}$ ). On en déduit

$$A_{\ell} a^{\ell} = \frac{B'_{\ell}}{a^{\ell+1}}, \quad \forall \ell.$$

On a en particulier  $B'_0 = 0$ .

Pour un milieu conducteur le problème serait alors résolu sachant que le potentiel est constant dans le milieu. Dans le cas des diélectriques cette propriété n'est pas valable et l'on doit utiliser une seconde condition de raccordement à l'interface entre les milieux qui fait intervenir la constante diélectrique. Comme  $\text{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{exc}}$ , la composante normale de  $\mathbf{D}$  est continue en l'absence de charges d'excitation à l'interface :  $(\mathbf{D}^{\geq} - \mathbf{D}^{\leq}) \cdot \mathbf{n} = 0$ . Ici, avec  $\mathbf{D}^{\leq} = \varepsilon_0 \mathbf{E}^{\leq} = \varepsilon_0 (\mathbf{E}_{\text{exc}}^{\leq} + \mathbf{E}_{\text{pol}}^{\leq})$  et  $\mathbf{D}^{\geq} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E}^{\geq} = \varepsilon_0 \kappa (\mathbf{E}_{\text{exc}}^{\geq} + \mathbf{E}_{\text{pol}}^{\geq})$ , cela entraîne

$$\varepsilon_0 [\mathbf{E}_{\text{exc}}^{\leq}(a, \theta) + \mathbf{E}_{\text{pol}}^{\leq}(a, \theta)] \cdot \mathbf{u}_r = \varepsilon_0 \kappa [\mathbf{E}_{\text{exc}}^{\geq}(a, \theta) + \mathbf{E}_{\text{pol}}^{\geq}(a, \theta)] \cdot \mathbf{u}_r$$

qui se traduit par une contrainte sur les dérivées normales du potentiel total :

$$\left( \frac{\partial \phi_{\text{tot}}^{\leq}}{\partial r} \right)_a = \kappa \left( \frac{\partial \phi_{\text{tot}}^{\geq}}{\partial r} \right)_a,$$

soit

$$\begin{aligned} \ell = 1, \quad & -E + A_1 = -\kappa E - 2\kappa \frac{B'_1}{a^3} \\ \forall \ell \geq 2, \quad & \ell A_{\ell} a^{\ell-1} = -(\ell + 1) \kappa \frac{B'_{\ell}}{a^{\ell+2}}. \end{aligned}$$

Les deux contraintes pour  $\ell \geq 2$  se traduisent par des relations de proportionnalité incompatibles et exigent  $A_{\ell \neq 1} = B'_{\ell \neq 1} = 0$ . Pour  $\ell = 1$ , la résolution des deux équations à deux inconnues conduit à

$$A_1 = E \frac{1 - \kappa}{1 + 2\kappa}, \quad B'_1 = E a^3 \frac{1 - \kappa}{1 + 2\kappa}$$

d'où les expressions complètes du potentiel :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{tot}}^{\leq}(r, \theta) &= -Er \cos \theta + E \frac{1 - \kappa}{1 + 2\kappa} r \cos \theta \\ &= -\frac{3\kappa}{1 + 2\kappa} Er \cos \theta \\ \phi_{\text{tot}}^{\geq}(r, \theta) &= -Er \cos \theta + E a^3 \frac{1 - \kappa}{1 + 2\kappa} \frac{1}{r^2} \cos \theta \\ &= Er \cos \theta \left( \frac{1 - \kappa}{1 + 2\kappa} \frac{a^3}{r^3} - 1 \right). \end{aligned}$$

Le champ total régnant dans la cavité s'écrit alors

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{E} + \frac{\kappa - 1}{2\kappa + 1} \mathbf{E} = \frac{3\kappa}{2\kappa + 1} \mathbf{E}.$$

C'est un champ uniforme. A l'extérieur, au champ moyen uniforme vient s'ajouter une contribution purement dipolaire.

ii) Champ de réaction :

L'effet polarisant d'un dipôle permanent sur un milieu diélectrique constitue un problème important pour les milieux polaires. Considérons une cavité sphérique vide à l'exception d'un dipôle permanent  $\mathbf{p}$ . Le potentiel  $\phi_{\mathbf{p}}(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  polarise le milieu diélectrique qui produit en réponse dans la cavité un champ appelé champ de réaction. On le calcule en remplaçant dans la résolution précédente  $-Er \cos \theta$  par  $\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ . On obtient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \ell = 1, \quad A_1 a^3 &= B'_1, \quad \frac{-2p}{4\pi\epsilon_0 a^3} + A_1 = -\kappa \left( \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 a^3} + \frac{2B'_1}{a^3} \right) \\ \ell \neq 1, \quad A_\ell &= B'_\ell = 0. \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$A_1 = -\frac{p}{2\pi\epsilon_0 a^3} \frac{\kappa - 1}{2\kappa + 1}, \quad B'_1 = -\frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{\kappa - 1}{2\kappa + 1}.$$

Le potentiel total à l'intérieur de la cavité devient

$$\phi_{\text{tot}}^{\leq}(r, \theta) = \phi_{\mathbf{p}}(r, \theta) + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^3} \frac{1 - \kappa}{1 + 2\kappa} r \cos \theta,$$

il lui correspond un champ

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathbf{p}} + \mathbf{E}_c = \mathbf{E}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{a^3} \frac{\kappa - 1}{1 + 2\kappa} \mathbf{p}.$$

A l'extérieur le potentiel est la somme de deux termes dipolaires :

$$\phi_{\text{tot}}^{\geq}(r, \theta) = \phi_{\mathbf{p}}(r, \theta) + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{r^2} \frac{1 - \kappa}{1 + 2\kappa} \cos \theta.$$



## 6. Calcul de la constante diélectrique

### 6.1. Milieux non polaires et formule de Clausius-Mossotti-Lorentz

La formule de Clausius-Mossotti établit une relation entre propriétés microscopiques (polarisabilité) et macroscopiques (permittivité ou indice de réfraction). Elle repose sur le passage du champ local au champ macroscopique. On a vu que ces deux champs ne diffèrent que par le champ de Lorentz qui règne au centre d'une cavité sphérique vide dans le volume du diélectrique. Cette cavité étant supposée de petite dimension devant l'échelle macroscopique, on peut supposer en bonne approximation que les charges de polarisation qui apparaissent à sa surface sont dues à une polarisation uniforme. Les charges de polarisation sont donc des charges surfaciques de densité  $\sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  où la normale est orientée vers l'extérieur du milieu, soit ici vers l'intérieur de la cavité. Cela donne par conséquent  $\sigma_{\text{pol}} = -P \cos \theta$  où  $\theta$  repère la position d'un élément de surface de la sphère de Lorentz par rapport à la direction de polarisation. Le calcul du champ créé à l'intérieur de la sphère par ce type de distribution est tout à fait classique et donne au centre de la sphère <sup>(70)</sup>

$$\mathbf{E}_{\text{Lorentz}} = +\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}.$$

La relation cherchée est donc

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}. \quad (3.53)$$

En écrivant ensuite que  $N\mathbf{p} = N\alpha\varepsilon_0\mathbf{E}_{\text{loc}}$  doit être égal à  $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$ , on obtient la formule de Clausius-Mossotti :

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3}, \quad \kappa = 1 + \chi = n^2 \quad (3.54)$$

ou, en fonction de l'indice de réfraction :

$$\frac{1}{3}N\alpha = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}. \quad (3.55)$$

Ces relations ne sont valables que dans le cas de milieux non polaires. Dans le cas contraire, il faut remplacer l'approche par le champ de Lorentz par une autre méthode due à Onsager.

La formule de Clausius-Mossotti permet de calculer la permittivité de milieux denses tels que les liquides à partir des valeurs mesurées pour les gaz correspondants. <sup>(71)</sup>

<sup>(70)</sup> On peut d'ailleurs montrer que ce champ est uniforme à l'intérieur de la cavité. La constante  $\lambda_L$  vaut donc  $1/3$ .

<sup>(71)</sup> Pour les liquides polaires, la méthode donne des résultats aberrants (il faut recourir au champ d'Onsager). Par exemple dans le cas de l'eau, on obtiendrait  $N\alpha = 13.2$  à partir des mesures pour la vapeur d'eau, ce qui donne une constante diélectrique négative pour le liquide alors que la valeur mesurée est de 80.

**Tableau 3.1** Polarisabilité atomique mesurée à partir de la constante diélectrique (ou de l'indice de réfraction de gaz) utilisée ensuite pour calculer la constante diélectrique de liquides qui, comparée aux valeurs mesurées, permet de tester la relation de Clausius-Mossotti.

Gaz					
Substance	$\kappa_{\text{exp}}$	$N\alpha$	Densité		
CS <sub>2</sub>	1.0029	0.0029	0.00339		
O <sub>2</sub>	1.000523	0.000523	0.00143		
CCl <sub>4</sub>	1.0030	0.0030	0.00489		

Liquide					
Substance	Densité	$d_{\text{liq}}/d_{\text{gaz}}$	$N\alpha$	$\kappa_{\text{th}}$	$\kappa_{\text{exp}}$
CS <sub>2</sub>	1.293	381	1.11	2.76	2.64
O <sub>2</sub>	1.19	832	0.435	1.509	1.507
CCl <sub>4</sub>	1.59	325	0.977	2.45	2.24

### Remarque :

Autre approche pour le champ local de Lorentz : on peut retrouver l'expression du champ local de Lorentz en appliquant le théorème de superposition de la façon suivante : isolons un moment dipolaire induit en imaginant une sphère creusée dans un milieu diélectrique, mais dont la taille est cette fois microscopique de sorte qu'elle ne contienne qu'une seule molécule de moment dipolaire  $\mathbf{p}$ . Le champ total au niveau du moment dipolaire comprend d'une part le champ dans la cavité vide  $\mathbf{E}_c$  alors qu'il règne un champ moyen  $\mathbf{E}$  à grande distance dans le diélectrique et d'autre part le champ de réaction  $\mathbf{E}_r$ , réponse du milieu au champ du dipôle. La somme de ces deux termes constitue le champ local agissant sur le dipôle considéré :

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E} + \frac{\kappa - 1}{2\kappa + 1} \mathbf{E} + \frac{2}{a^3} \frac{\kappa - 1}{2\kappa + 1} \frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0}.$$

Dans l'approximation continue, le moment dipolaire microscopique est remplacé par la polarisation, soit  $p = \frac{4}{3}\pi a^3 P$ . En utilisant de plus  $P = \epsilon_0(\kappa - 1)E$ , on retrouve

$$\mathbf{E}_{\text{loc}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0},$$

d'où découle l'expression

$$\chi = \frac{N\alpha}{1 - N\alpha/3}.$$

En imaginant un empilement compact de sphères identiques, le taux de remplissage maximum est de 0.745, ce qui entraîne que  $N\alpha$  peut atteindre au mieux 2.235, c'est-à-dire que la susceptibilité diélectrique associée à des dipôles induits ne peut pas diverger<sup>(72)</sup>.

<sup>(72)</sup> Dans un volume  $V$  il peut y avoir au maximum  $\mathcal{N} = 0.745 \times V/\frac{4}{3}\pi a^3$  sphères identiques, soit, avec  $\alpha = 4\pi a^3$ ,  $N\alpha = \frac{\mathcal{N}}{V}\alpha \leq 0.745 \times \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a^3} \times 4\pi a^3 \simeq 2.235$ .

## 6.2. Milieux polaires et formule d'Onsager

Onsager a proposé une autre approche du champ local permettant la prise en compte des milieux polaires. On se limitera ici au cas de dipôles permanents non polarisables. Seul l'effet d'orientation est pris en compte. Comme le champ de réaction est proportionnel au moment dipolaire, il n'exerce aucune action orientante et le champ local d'Onsager se réduit à

$$\mathbf{E}_{\text{Ons.}} = \mathbf{E} + \frac{\kappa - 1}{2\kappa + 1} \mathbf{E}.$$

La polarisation se déduit du début de la courbe de Langevin :

$$P = Np \frac{p}{3k_B T} E_{\text{Ons.}},$$

soit, en notant  $\frac{Np^2}{3\varepsilon_0 k_B T} = \gamma$ ,

$$\varepsilon_0(\kappa - 1)E = \gamma \varepsilon_0 \frac{3\kappa}{2\kappa + 1} E$$

qui se réduit à une équation du second degré en  $\kappa$  dont la racine positive vaut

$$\kappa = \frac{1 + 3\gamma}{4} + \frac{3}{4} \sqrt{1 + \frac{2}{3}\gamma + \gamma^2}.$$

A basse température on retrouve un comportement en loi de Curie  $\kappa \sim \frac{Np^2}{2\varepsilon_0 k_B T}$ .

## 7. Milieux non linéaires ou anisotropes

### 7.1. Milieux diélectriques non linéaires : ferroélectricité

#### 7.1.1. Instabilité ferroélectrique

La formule de Clausius-Mossotti, appliquée à un milieu polaire, conduit à la catastrophe de Mossotti. En effet, si le milieu est non polaire, la polarisabilité est indépendante de la température et proportionnelle au volume caractéristique à l'échelle moléculaire, de sorte que  $N\alpha \ll 3$  <sup>(73)</sup>. La susceptibilité diélectrique reste par conséquent finie. Dans un milieu polaire en revanche, à la polarisabilité précédente s'ajoute un terme dû à l'orientation qui croît indéfiniment lorsque la température diminue, de sorte que l'on devrait toujours observer une singularité à une température critique où la susceptibilité diverge. Ce phénomène, connu sous le nom de transition ferroélectrique, n'est observé expérimentalement que pour certains corps, mais ne constitue pas une règle générale. L'approche de Clausius-Mossotti-Lorentz n'est donc valable que dans les milieux non polaires. Le formalisme d'Onsager est en revanche adapté aux milieux polaires, mais ne prévoit de singularité qu'à température nulle.

<sup>(73)</sup> Au mieux,  $N\alpha$  peut être de l'ordre de 2.235 pour un empilement compact cristallin par exemple, alors que dans les milieux dilués,  $N\alpha$  reste très petit.

### 7.1.2. Transition ferroélectrique du titanate de baryum

Certains milieux diélectriques présentent spontanément, au-dessous d'une température critique, une instabilité conduisant à une phase cristallographique de polarisation spontanée (en l'absence de champ excitateur) non nulle. C'est le cas de la transition ferro-distorsive du titanate de baryum.

A haute température ( $T > 130^\circ\text{C}$ ), la maille élémentaire est cubique, les centres de gravité des charges positives et négatives coïncident et la maille élémentaire ne porte pas de moment dipolaire permanent. Le cristal de  $\text{BaTiO}_3$  n'est donc pas polarisé en l'absence de champ extérieur (phase paraélectrique). Il est correctement décrit par l'approximation des milieux linéaires, homogènes et isotropes. Lorsque la température diminue, le système subit des modifications de structure cristallographique et les centres de gravité des charges positives et négatives ne coïncident plus. Il apparaît une polarisation spontanée en l'absence de champ appliqué (phase ferroélectrique). Cette première transition à une température  $T_c \simeq 130^\circ\text{C}$  conduit à une maille élémentaire quadratique allongée le long de l'axe  $c$  qui porte la polarisation spontanée. Il se produit à plus basse température deux nouvelles transitions, tout d'abord à  $0^\circ\text{C}$  (vers une structure orthorhombique où la polarisation spontanée est suivant l'axe 110), puis à  $-90^\circ\text{C}$  (vers une phase rhomboédrique avec une polarisation suivant l'axe 111). La première transition de phase est du second ordre. Elle s'accompagne d'une singularité de la susceptibilité décrite en théorie de champ moyen par une loi de Curie dans la phase de haute température :

$$\chi \simeq \frac{Cte}{T - T_c}, \quad T > T_c.$$

Cette loi est vérifiée expérimentalement avec une bonne précision sur divers diélectriques de structure pérovskite.

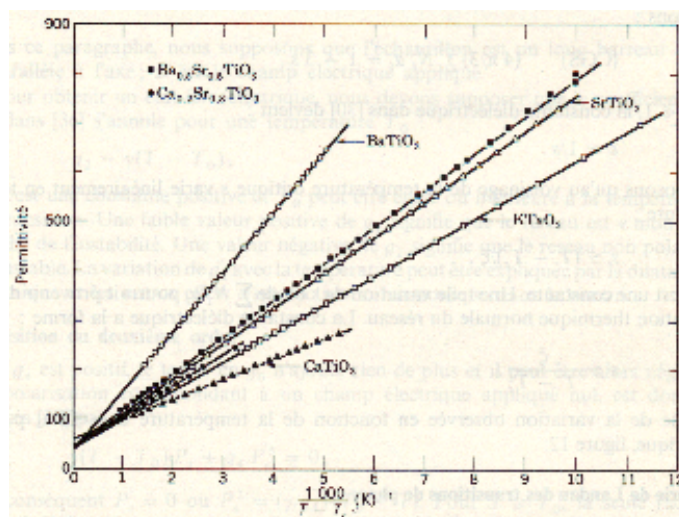


Figure 3.6 Loi de Curie pour les structures pérovskites.

## 7.2. Milieux diélectriques anisotropes : cristaux liquides

Un matériau anisotrope a des propriétés différentes dans les différentes directions de l'espace. C'est le cas des cristaux liquides constitués de molécules allongées orientées majoritairement, pour des raisons d'encombrement stérique, dans la direction d'un vecteur unitaire appelé directeur et noté  $\mathbf{n}$ . Les propriétés physiques (optiques, électriques, ...) sont donc très différentes parallèlement à  $\mathbf{n}$  et dans le plan perpendiculaire. Dans l'approximation linéaire, la susceptibilité est définie par un

tenseur diagonal dans le repère des axes principaux. Sous un champ parallèle à  $\mathbf{n}$ , la réponse du milieu est plus forte que dans le plan perpendiculaire :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{\parallel} &= \varepsilon_0 \chi_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}, \\ \mathbf{P}_{\perp} &= \varepsilon_0 \chi_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}.\end{aligned}$$

Pour un champ d'orientation arbitraire on écrit  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ , soit

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

On peut également écrire  $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$  soit

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 [\chi_{\perp} \mathbf{E} + \underbrace{(\chi_{\parallel} - \chi_{\perp})}_{\chi_a} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}].$$

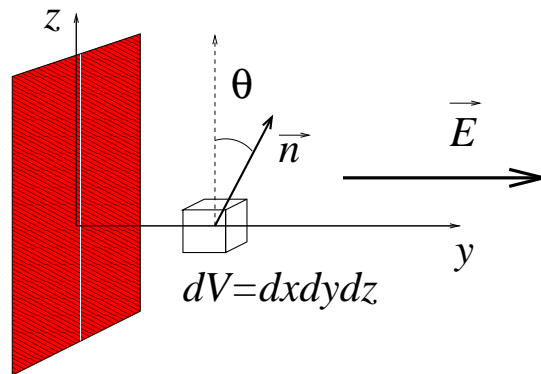
Cette expression permet de définir l'énergie potentielle d'un cristal liquide de directeur  $\mathbf{n}$  dans un champ  $\mathbf{E}$  incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à  $\mathbf{n}$  :

$$\mathcal{U} = -W = - \int_0 (\mathbf{P} \wedge \mathbf{E}) d\theta = -\varepsilon_0 \chi_a \int_0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) |\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}| d\theta = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi_a E^2 \sin^2 \theta.$$

Cette énergie est totalement due à l'anisotropie.

### Exemple :

Propriétés diélectriques d'un milieu cristal liquide semi-infini : On considère un espace semi-infini limité par un plan de verre  $xOz$  en  $y = 0$  et s'étendant sur  $y > 0$ , rempli d'un milieu cristal liquide.



On définit la densité d'énergie potentielle d'anisotropie

$$u_a = \frac{d\mathcal{U}_a}{dy} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi_a E^2 \sin^2 \theta$$

pour  $dx = dz = 1$ .

Si un traitement approprié (surfactant) est appliqué sur le verre, le vecteur directeur au niveau de la surface  $xOz$  est contraint à être parallèle à ce plan :  $\mathbf{n}(y = 0) \equiv \mathbf{u}_z$ . Lorsque l'on applique un champ électrique perpendiculaire à la surface de verre, les molécules tendent à s'orienter dans le sens du champ et l'angle  $\theta$  du directeur par rapport à l'axe  $Oz$  est une fonction de la coordonnée  $y$ . La surface induit alors une contrainte élastique

de la forme  $u_e = \frac{d\mathcal{U}_e}{dy} = \frac{1}{2}k \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2$ . Le densité d'énergie  $u_{\text{tot}}[\theta(y), d\theta/dy] = u_e + u_a$  est une fonctionnelle de  $\theta(y)$ . A l'équilibre, l'énergie totale

$$\mathcal{U}_{\text{tot}} = \int_0^\infty u_{\text{tot}}[\theta(y), d\theta/dy] dy$$

est minimale. Le profil  $\theta(y)$  à l'équilibre est donc solution de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial u_{\text{tot}}}{\partial (d\theta/dy)} - \frac{\partial u_{\text{tot}}}{\partial \theta} = 0$$

et  $u_e - u_a$  est une constante. On peut justifier ces résultats par une analogie avec la mécanique analytique. On a en effet

$$\mathcal{U}_{\text{tot}}[\theta(y)] = \int_0^\infty \left( \frac{1}{2}k \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi_a E^2 \sin^2 \theta \right) dy$$

à comparer à

$$S[x(t)] = \int_0^\infty \underbrace{\left( \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - \mathcal{V}(x) \right)}_{L(x, \dot{x})=T-\mathcal{V}} dt$$

où la quantité conservée s'écrit

$$T + \mathcal{V} \longrightarrow u_e - u_a = \frac{1}{2}k \left( \frac{d\theta}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi_a E^2 \sin^2 \theta.$$

Lorsque  $y \rightarrow \infty$ ,  $u_e - u_a \rightarrow \frac{1}{2}\varepsilon_0\chi_a E^2$ , de sorte que l'on obtient l'équation différentielle pour le profil d'orientation du directeur

$$\frac{d\theta}{dy} = \underbrace{\sqrt{\frac{\varepsilon_0\chi_a E^2}{k}}}_{1/\xi} \cos \theta$$

qui s'intègre en

$$-\frac{y}{\xi} + \text{Cst} = \ln \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right).$$

La constante se détermine en  $y = 0$ ,  $\text{Cst} = \ln \tan \pi/4 = 0$  et la solution pour le profil d'équilibre est finalement

$$\theta_0(y) = \frac{\pi}{2} - 2 \text{Arctan} e^{-y/\xi}.$$

L'énergie totale vaut ainsi au minimum de la fonctionnelle

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{U}_{\text{tot}} &= \mathcal{U}_{\text{tot}}[\theta_0(y)] - \mathcal{U}_{\text{tot}}[\theta = \pi/2] \\
&= \int_0^\infty dy \left( \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta_0}{dy} \right)^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi_a E^2 \sin^2 \theta_0 \right) - \int_0^\infty dy \left( -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi_a E^2 \right) \\
&= \int_0^\infty \left( \underbrace{\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta_0}{dy} \right)^2}_{\frac{1}{2} k \frac{\varepsilon_0 \chi_a E^2}{k} \cos^2 \theta_0(y)} + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \chi_a E^2 \cos^2 \theta_0 \right) dy \\
&= \int_0^\infty \underbrace{dy}_{\xi \frac{d\theta}{\cos \theta_0}} \varepsilon_0 \chi_a E^2 \cos^2 \theta_0(y) \\
&= \varepsilon_0 \chi_a E^2 \xi \int_0^{\pi/2} d\theta_0 \cos \theta_0 \\
&= \varepsilon_0 \chi_a E^2 \xi
\end{aligned}$$

On définit également la polarisation totale suivant  $Oz$  :  $\mathcal{P}_z = \int_0^\infty (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_z) dy$  pour estimer l'effet de désorientation dû à la surface.

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{P}_z &= \mathcal{P}[\theta_0(y)] \cdot \mathbf{u}_z - \mathcal{P}[\theta = \pi/2] \cdot \mathbf{u}_z \\
&= \varepsilon_0 \int_0^\infty dy \chi_a (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_z \\
&= \varepsilon_0 \chi_a E \xi.
\end{aligned}$$

## 8. Energie électrostatique des milieux diélectriques

### 8.1. Travail élémentaire

Considérons un volume  $\Omega$  contenant des diélectriques dans l'approximation linéaire, homogène et isotrope, en présence de charges libres de densité  $\rho_{\text{exc}}$ . L'effet de la polarisation est de produire un potentiel qui diffère du potentiel créé par les charges d'excitation seules :  $\phi_{\text{tot}}^{(74)}$ . La modification de la charge excitatrice d'une quantité élémentaire  $d\rho_{\text{exc}}$  dans ce potentiel nécessite un travail

$$\delta W = \phi_{\text{tot}} d\rho_{\text{exc}} d\tau.$$

Comme  $\text{div } \mathbf{D} = \rho_{\text{exc}}$ , on a aussi  $\text{div } d\mathbf{D} = d\rho_{\text{exc}}$  ce qui permet d'écrire, à l'aide de  $\phi_{\text{tot}} \text{div } d\mathbf{D} = \text{div}(\phi_{\text{tot}} d\mathbf{D}) - d\mathbf{D} \nabla \phi_{\text{tot}}$  :

$$\delta W = [\text{div}(\phi_{\text{tot}} d\mathbf{D}) - d\mathbf{D} \nabla \phi_{\text{tot}}] d\tau.$$

<sup>(74)</sup> L'introduction du matériau diélectrique peut provoquer une redistribution des charges excitatrices, mais celle-ci ne demande aucun travail car les armatures portant ces charges sont équipotentielles.

L'intégration sur le volume total  $\Omega$  permet de transformer le premier terme en intégrale de surface qui disparaît dans la limite d'un volume infini (dans l'hypothèse où il n'y a pas de charges à l'infini) et il reste

$$\delta W = \mathbf{E} d\mathbf{D} d\tau. \quad (3.56)$$

On peut également décomposer en deux termes :

$$\delta W = \varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{E} d\tau + \mathbf{E} d\mathbf{P} d\tau \quad (3.57)$$

où le terme  $\varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{E}$  correspond à la densité volumique d'énergie nécessaire à la création du champ  $\mathbf{E}$  dans le vide <sup>(75)</sup> et  $\mathbf{E} d\mathbf{P}$  représente l'énergie à fournir pour polariser le matériau.

## 8.2. Fonctions thermodynamiques

Connaissant l'expression du travail élémentaire de polarisation, on peut ensuite exprimer les diverses fonctions thermodynamiques. On considèrera pour cela des expressions par unité de volume et on négligera les variations de volume du matériau <sup>(76)</sup>. On a en particulier

$$\begin{aligned} dU &= T dS + \mathbf{E} d\mathbf{D} \\ dF &= -S dT + \mathbf{E} d\mathbf{D}. \end{aligned}$$

L'énergie libre est une fonction plus intéressante à manipuler que l'énergie interne car il est plus aisé de fixer expérimentalement la température que l'entropie.

Si l'on s'intéresse à une transformation à température constante au cours de laquelle l'état thermodynamique du matériau diélectrique est décrit par l'établissement d'un déplacement électrique (c'est-à-dire la polarisation par influence de charges excitatrices), on a  $\int_0^D \mathbf{E} d\mathbf{D} = \int_0^E \varepsilon \mathbf{E} d\mathbf{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}$ , soit

$$F(T_0, \mathbf{D}) - F(T_0, 0) = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}. \quad (3.58)$$

Pour un système de volume  $\Omega$  on a

$$\mathcal{F}(T_0, \mathbf{D}) - \mathcal{F}(T_0, 0) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} d\tau.$$

L'entropie est définie par exemple par

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_{D=\text{Cst}}.$$

En écrivant  $F = F_0 + \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} = F_0 + \frac{D^2}{2\kappa\varepsilon_0}$ , on a

$$S = - \frac{\partial}{\partial T} \left( F_0 + \frac{D^2}{2\kappa\varepsilon_0} \right)_{D=\text{Cst}} = S_0 - \underbrace{\frac{D^2}{2\varepsilon_0}}_{\frac{1}{2} \kappa \mathbf{E} \mathbf{D}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{\kappa} \right)_{D=\text{Cst}}}_{-\frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right)_{D=\text{Cst}}}.$$

<sup>(75)</sup> Il faut toutefois noter que  $\mathbf{E}$  diffère de la valeur que prendrait le champ créé par la même distribution de charges libres dans le vide.

<sup>(76)</sup> Il suffirait d'ajouter un terme de travail mécanique  $-p dV$  pour en tenir compte.



Finalement il vient

$$S - S_0 = +\frac{1}{2} \mathbf{ED} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial T}. \quad (3.59)$$

L'intégration sur le volume donne

$$\mathcal{S}(T_0, \mathbf{D}) - \mathcal{S}(T_0, 0) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{ED} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial T} d\tau.$$

L'énergie interne finalement peut s'exprimer par  $\mathcal{U} = F + TS$  :

$$U - \mathcal{U}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{ED} \left( 1 + \frac{T}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right), \quad (3.60)$$

ou

$$\mathcal{U}(T_0, \mathbf{D}) - \mathcal{U}(T_0, 0) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{ED} \left( 1 + \frac{T_0}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial T} \right) d\tau.$$

# Chapitre 4

## Magnétostatique dans le vide

En magnétostatique, l'équation de conservation de la charge électrique est réalisée en régime statique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$



avec  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , soit  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , le courant est à flux conservatif.

### 1. Force de Lorentz, effet Hall, force de Laplace

#### 1.1. Force de Lorentz

Expérimentalement, on constate l'existence d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$  par son influence sur la trajectoire d'une particule chargée. Lorentz a donné vers 1920 une interprétation de ce phénomène par l'interaction d'une charge avec le champ créé par d'autres sources :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}). \quad (4.1)$$

La force  $q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  courbe les trajectoires (parmi les applications, citons la chambre à bulle, les spectromètres de masse, le cyclotron...) et ne fournit pas d'énergie à la particule<sup>(77)</sup>.

<sup>(77)</sup> On a en effet  $W = \int \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = 0$ .

## 1.2. Conséquences

### 1.2.1. Pulsation cyclotron

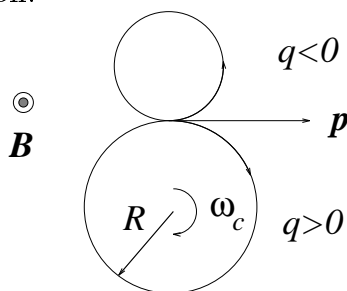
Une charge  $q$  en mouvement dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$  voit sa trajectoire courbée sous l'effet de la force de Lorentz :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (4.2)$$

qui conduit à

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{R} = qvB, & R = \frac{mv}{qB} \\ \frac{dv}{dt} = 0, & \omega_c = \frac{qB}{m} \end{cases}$$

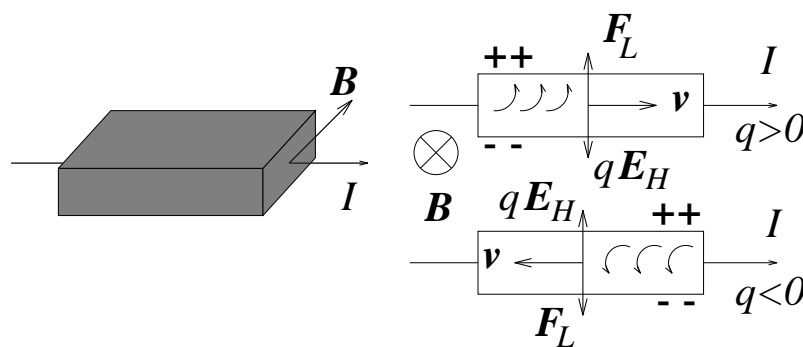
où  $\omega_c$  est la pulsation cyclotron.



**Figure 4.1** Configuration où la vitesse initiale de la particule est perpendiculaire au champ. Le sens de rotation de la particule autour des lignes de champ dépend du signe de sa charge.

### 1.2.2. Effet Hall

On considère un conducteur parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$ , perpendiculaire au courant pour simplifier le problème. Les porteurs de charge sont défléchis sous l'effet de la force de Lorentz, ce qui crée une différence de potentiel sur les faces du conducteur, suite à l'accumulation de charges.



**Figure 4.2** Illustration de la géométrie de l'effet Hall dans les deux cas de figure selon que les porteurs de charges sont positifs ou négatifs.

L'équilibre des porteurs de charge en régime permanent est défini par la compensation entre la force d'origine purement magnétique et celle qui résulte de la tension de Hall, il est assuré par la condition :

$$\mathbf{E}_H = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (4.3)$$

qui définit le champ de Hall.

### 1.2.3. Force de Laplace

La force de Laplace, agissant sur un élément de courant plongé dans un champ magnétique, résulte de la force de Lorentz agissant sur les porteurs de charge dans un conducteur par l'intermédiaire de la force de Hall agissant sur les ions du réseau. Un élément de volume  $d\tau = S dl$  comprend  $n d\tau$  ions, soit

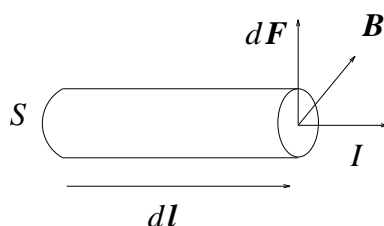
$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{\text{rés}} &= nq_{\text{ions}}\mathbf{E}_H S dl \\ &= -nq_{\text{ions}}\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} S dl \\ &= +nS dl \underbrace{|q_e|\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}}_{\text{Lorentz}} \\ &= \underbrace{n|q_e|v}_j \underbrace{S dl}_{d\tau\mathbf{u}_j} \wedge \mathbf{B} \end{aligned}$$

où  $n$  est la densité de porteurs de charge,  $d\mathbf{l}$  l'élément de longueur du conducteur et  $S$  sa section perpendiculaire. Avec  $I = jS$ , on en déduit la force de Laplace pour un circuit filiforme :

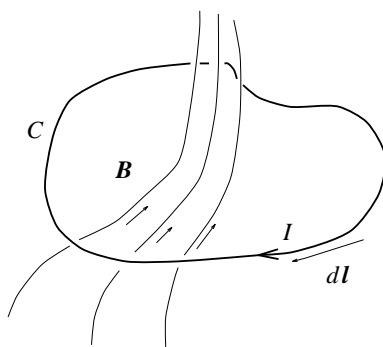
$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}, \quad (4.4)$$

mais on généralise aisément à un circuit quelconque

$$d\mathbf{F} = \mathbf{j} d\tau \wedge \mathbf{B}. \quad (4.5)$$



**Figure 4.3** Géométrie de la force de Laplace. On a utilisé une approximation de circuit filiforme.



**Figure 4.4** Cas d'un circuit filiforme quelconque.

Sous forme intégrale le long d'un circuit fermé la force totale prend l'expression :

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}.$$

C'est la force subie par un conducteur parcouru par un courant  $I$  plongé dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$ . Parmi les applications on peut citer : les moteurs et l'électrotechnique, les galvanomètres, la force sur le dipôle magnétique,...

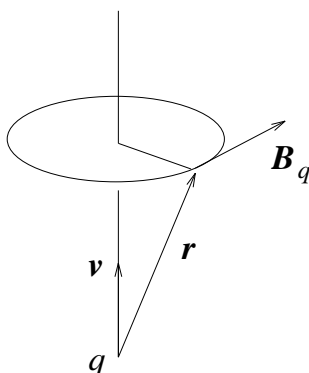
## 2. Champ B produit par un courant continu

### 2.1. Loi de Biot et Savart

La loi de Biot et Savart est un postulat fondé sur des résultats expérimentaux. Comme pour la loi de Coulomb en électrostatique, c'est sa valeur prédictive qui lui confère une valeur scientifique. Dans un cadre relativiste toutefois, la loi de Biot et Savart se déduit par transformation de Lorentz des champs de la loi de Coulomb et devient ainsi une conséquence d'hypothèses plus fondamentales. L'expression

$$\mathbf{B}_q = \frac{\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r})}{c^2} \quad (4.6)$$

est le champ magnétique créé par une charge ponctuelle au point  $M$  à la distance  $\mathbf{r}$ . Dans cette équation,  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  est le champ coulombien centré sur la position actuelle de la charge.

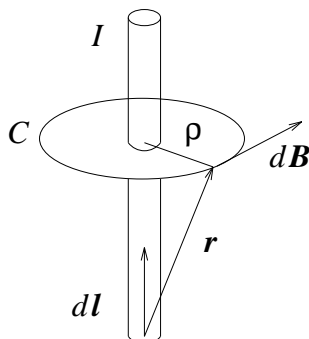


**Figure 4.5** Champ magnétique créé par une charge en mouvement.

Si l'on accepte l'expression du champ coulombien (vraie pour  $v \ll c$ ), on obtient alors la loi de Biot et Savart :

$$\mathbf{B}_q(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q\mathbf{v} \wedge \mathbf{r}}{r^3}.$$

On introduit généralement la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H.m<sup>-1</sup>. Pour un élément de courant, on considère un ensemble de charges, on a :  $d\mathbf{B} = n \underbrace{S}_{d\tau} d\mathbf{l} \mathbf{B}_q$ .



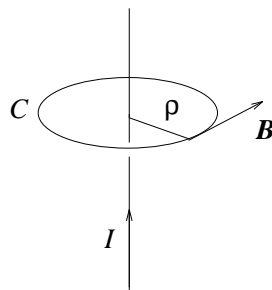
**Figure 4.6** Champ magnétique créé par un élément de courant.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \wedge \mathbf{r}}{r^3}, \quad (4.7)$$

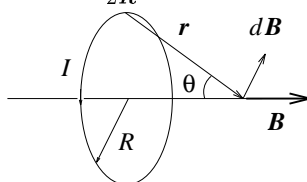
$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j} d\tau \wedge \mathbf{r}}{r^3}. \quad (4.8)$$

**Exemples :**

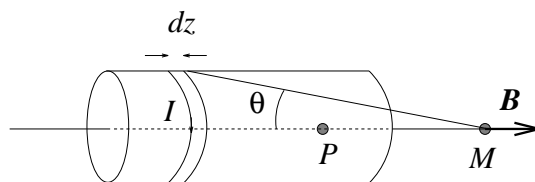
i) Fil rectiligne infini : par application de la loi de Biot et Savart, on trouve  $B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$ , orthoradial.



ii) Spire circulaire : on obtient  $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$  colinéaire à l'axe.



iii) Solénoïde de  $n$  spires par unité de longueur :  $dB = \frac{\mu_0 n I}{2} \sin \theta d\theta$  en un point quelconque de l'axe.



$$B(M) = \frac{1}{2} \mu_0 I (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad \text{à l'extérieur}$$

$$B(P) = \frac{1}{2} \mu_0 I (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad \text{à l'intérieur}$$

iv) Cas limite du solénoïde infini :  $B_{\text{int}} = \mu_0 n I$ ,  $B_{\text{ext}} = 0$ .

**2.2. Théorème de Gauss**

D'après la loi de Biot et Savart,  $\text{div}(d\mathbf{B}) = 0$ . Les opérateurs div et d'intégration étant linéaires, on a donc  $d(\text{div } \mathbf{B}) = 0$ , soit, l'introduction d'une constante n'ayant pas de sens physique,

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (4.9)$$

Le flux du champ magnétique est conservatif. Il est nul à travers toute surface fermée, qu'elle soit ou non traversée par des courants.

### 2.3. Potentiel vecteur

Puisque  $\text{div } \mathbf{B} = 0$ , il existe  $\mathbf{A}$  tel que

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (4.10)$$

#### Remarques :

i) Lagrangien d'une particule chargée dans un champ électromagnétique : en relativité, l'action comprend le terme cinétique  $\int (-mc ds)$  auquel il convient ici d'ajouter un terme d'interaction, invariant relativiste, soit

$$S = \int_a^b (-mc ds - qA_i dx^i)$$

où  $ds = (c dt, -dx, -dy, -dz)$  est l'intervalle de Minkowski et  $A_i = (\frac{\phi}{c}, -A_x, -A_y, -A_z)$  le quadripotential.

$$\begin{aligned} ds &= (c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)^{1/2} \\ &= c dt \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$A_i dx^i \equiv \sum_{i=1}^4 A_i dx^i = \frac{\phi}{c} dt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.$$

Cette définition de l'action, invariante par transformation de Lorentz, permet de définir les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

Le long d'une ligne d'Univers joignant deux événements  $a$  et  $b$ , on a :

$$S = \int_a^b \left( -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q(\mathbf{A}\mathbf{v} - \phi) \right) dt \quad (4.11)$$

ce qui permet d'identifier le lagrangien<sup>(78)</sup> :

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + q(\mathbf{A}\mathbf{v} - \phi). \quad (4.12)$$

<sup>(78)</sup> On peut ensuite déduire les équations du mouvement de l'application des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$$

avec  $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = q\nabla(\mathbf{A}\mathbf{v}) - q\nabla\phi$  où  $\nabla(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \underbrace{(\mathbf{A}\nabla)}_0 \mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \underbrace{\text{rot } \mathbf{v}}_0 + \mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{A}$ . La dérivée

fonctionnelle pour obtenir les équations de Lagrange se fait à  $\mathbf{v} = \text{cte}$ , ce qui élimine les termes indiqués. Il vient

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = q(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + q\mathbf{v} \wedge \text{rot } \mathbf{A} - q\nabla\phi.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\mathbf{A} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} = \mathbf{P}$$

ii) Invariance de jauge : le choix de  $\mathbf{A}$  n'est pas unique, car tout champ de vecteurs  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$  convient aussi en régime statique, puisqu'il conduit au même champ magnétique (on parle de changement de jauge).

En régime variable, on définit par exemple

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}, t), \quad \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

L'action devient

$$q \int_a^b (\mathbf{A} \mathbf{v} - \phi) dt + q \int_a^b \underbrace{\left( \nabla f d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt \right)}_{df(\mathbf{r}, t)} dt$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{q(f(\mathbf{r}_b, t_b) - f(\mathbf{r}_a, t_a))}$$

ce qui ne fait que changer l'action d'une quantité indépendante des chemins entre  $a$  et  $b$  et donc ne modifie pas les équations du mouvement.

Il y a donc un certain arbitraire dans la détermination des potentiels que l'on lève par un choix de jauge.

## 2.4. Théorème d'Ampère

Énoncé : la circulation de  $\mathbf{B}$  le long d'un contour fermé  $\mathcal{C}$  est égale à  $\mu_0 \times$  somme des courants enlacés par  $\mathcal{C}$  :

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enlacés}}. \quad (4.13)$$

L'orientation de  $d\mathbf{l}$  sur  $\mathcal{C}$  est conforme au théorème de Stokes pour que  $I$  traverse une surface appuyée sur  $\mathcal{C}$  dans le sens de la normale.

où  $\mathbf{p}$  est la quantité de mouvement (aussi notée  $\pi$ ) et  $\mathbf{P}$  l'impulsion généralisée, soit

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} + q\mathbf{A}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + q \underbrace{\frac{d\mathbf{A}}{dt}}_{\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}}$$

et il reste

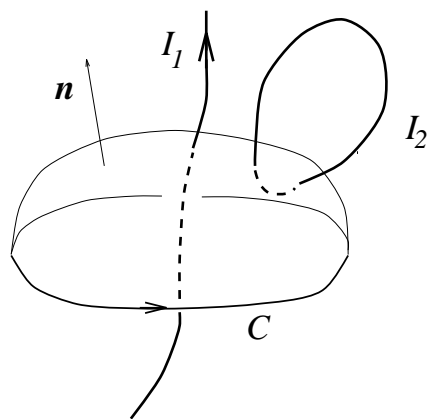
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -q\nabla\phi - q\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + q\mathbf{v} \wedge \mathbf{rot} \mathbf{A}$$

d'où la définition usuelle des champs

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$$





**Figure 4.7** Conventions d'orientation de la normale à la surface par rapport au sens de circulation dans le théorème de Stokes.

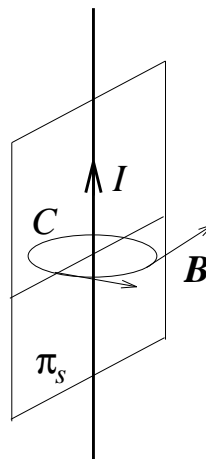
Pour l'application aux cas de haute symétrie, la méthode est analogue à celle du théorème de Gauss. La symétrie donne suffisamment de contraintes sur  $\mathbf{B}$  pour qu'on puisse en calculer la circulation. En un point quelconque d'un plan d'antisymétrie  $\Pi_a$  de la distribution de courants,  $\mathbf{B}$  est dans  $\Pi_a$ , alors que  $\mathbf{B}$  est perpendiculaire aux plans de symétrie  $\Pi_s$ .

### Applications :

i) Fil rectiligne infini.  
 symétrie :  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_\varphi$   
 invariance :  $B = B(\rho)$   
 d'où le choix de  $\mathcal{C}$  : cercle centré sur le fil.

$$2\pi\rho B(\rho) = \mu_0 I$$

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}.$$



ii) Formulation locale :

$$I(\mathcal{C}) = \iint_{S(\mathcal{C})} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_0} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\underbrace{\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}_{\iint_{S(\mathcal{C})} \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}} = \mu_0 \iint_{S(\mathcal{C})} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

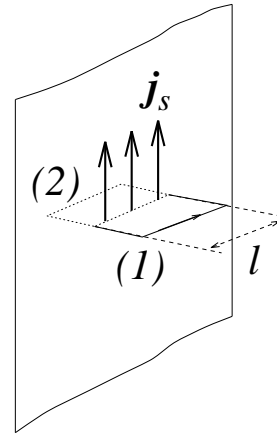
L'égalité est vraie pour toute surface s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ , on en déduit l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (4.14)$$

iii) Discontinuité de la composante tangentielle de  $\mathbf{B}$  : on considère une nappe de courant parcourue par un courant superficiel de densité  $\mathbf{j}_s$ .  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  entraîne  $B_n(1) = B_n(2)$ .

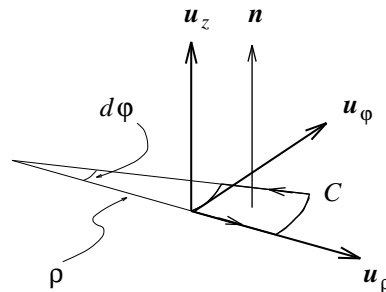
$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s$  entraîne  $\ell (B_t(1) - B_t(2)) = \mu_0 \ell j_s$ .

$$\begin{cases} B_n(1) - B_n(2) = 0 \\ B_t(1) - B_t(2) = \mu_0 j_s \end{cases}$$



iv) Calcul de  $\text{rot}$  en coordonnées cylindriques : on utilise le théorème de Stokes sous forme locale :

$$\oint \mathbf{A} \, d\ell = \iint \text{rot } \mathbf{A} \, d\mathbf{S} \quad \text{ou} \quad d\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \text{rot } \mathbf{A} \, d\mathbf{S}.$$



où  $\mathbf{n}$  et  $\mathcal{C}$  sont orientés de façon compatible.

Sur le contour élémentaire  $\mathcal{C}$ ,  $d\mathcal{C}$  vaut la différence des circulations de  $A_\rho$  en  $\varphi$  et  $\varphi + d\varphi$  et de  $A_\varphi$  en  $\rho$  et  $\rho + d\rho$ .

$$\begin{aligned} d\mathcal{C} &= \frac{\partial}{\partial \rho} (A_\varphi \rho \, d\varphi) \, d\rho - \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\rho \, d\rho) \, d\varphi \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) \, d\rho \, d\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} (A_\rho) \, d\rho \, d\varphi \\ &= (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_z) \rho \, d\rho \, d\varphi \end{aligned}$$

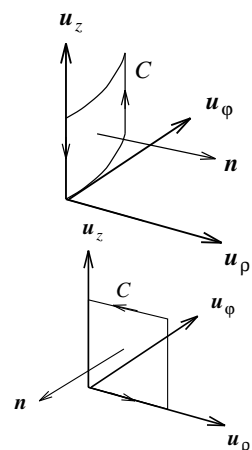
$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}. \quad (4.15)$$

Les autres composantes se calculent de même<sup>(79)</sup>.

(79)

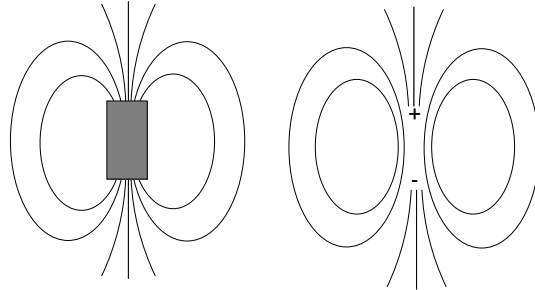
$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_\varphi = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}$$



## 2.5. Conséquences des équations de Maxwell

L'expression  $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  est une équation générale, à condition d'inclure toutes les charges (y compris les charges de polarisation) du problème. En revanche,  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  est toujours vraie. Cette relation exclut l'existence de monopôles magnétiques<sup>(80)</sup>. On définit cependant dans certaines circonstances des *masses magnétiques* comme intermédiaires de calcul. Ce sont des concepts sans signification concrète, mais qui permettent une description macroscopique des milieux magnétiques.



**Figure 4.8** Analogie permettant d'introduire des masses magnétiques.

Il faudra néanmoins faire attention, car cette équivalence n'est valable qu'à l'extérieur de la matière aimantée.

### Applications :

i) Les électroaimants le noyau de fer doux canalise les lignes de champ et multiplie son intensité par un facteur  $\mu_r \sim 10^3$ . Comme le flux de  $\mathbf{B}$  est conservatif,  $\mathbf{B}$  est à peu près aussi intense dans l'entrefer que dans la matière, ce qui représente un gain considérable par rapport au coût nécessaire pour créer un champ dans le vide.

ii) Équation de Poisson magnétique : le théorème d'Ampère sous forme locale, combiné avec la relation de définition du potentiel vecteur,

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \text{ et } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

conduit à une équation différentielle locale pour ce dernier, analogue à l'équation de Poisson en électrostatique.

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.$$

En régime statique, on fait le choix de la jauge de Coulomb,  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ , de sorte que

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (4.16)$$

Cette expression est très utile, car elle permet de généraliser l'expression intégrale du potentiel scalaire créé par une distribution finie de charges à une forme analogue pour le potentiel vecteur créé par une distribution finie de courants :

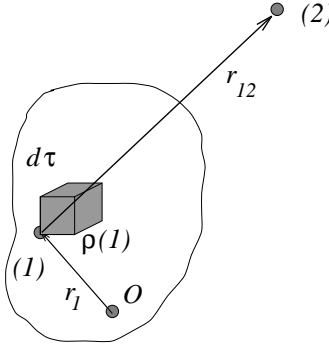
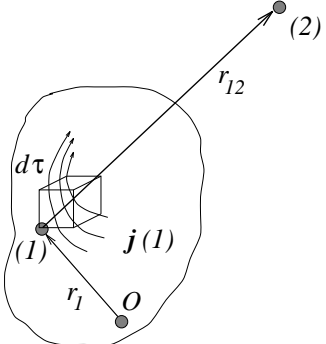
$$\mathbf{A}(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}(1) d\tau}{r_{12}} \quad (4.17)$$

ou encore, pour des circuits filiformes :

$$\mathbf{A}(2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}(1)}{r_{12}} \quad (4.18)$$

<sup>(80)</sup> Vers 1930, Dirac a proposé de symétriser les équations de Maxwell en introduisant des monopôles magnétiques de densité volumique  $\rho_m$  telle que  $\text{div } \mathbf{B} = \rho_m$ . L'équation  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  étant vérifiée expérimentalement avec une très grande précision, aucun monopôle magnétique n'a été observé jusqu'à présent.

iii) Analogies électrostatique-magnétostatique pour les potentiels.

électrostatique	magnétostatique
distributions <u>finies</u>	
	
$\Delta\phi = -\rho/\varepsilon_0$	$\Delta A_x = -\mu_0 j_x$ $\Delta A_y = -\mu_0 j_y$ $\Delta A_z = -\mu_0 j_z$
$\phi(2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(1) d\tau}{r_{12}}$	$\mathbf{A}(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}(1) d\tau}{r_{12}}$
distributions filiformes <u>finies</u>	
$\phi(2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{\mathcal{L}} \frac{\lambda(1) d\ell}{r_{12}}$	$\mathbf{A}(2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\mathbf{l}(1)}{r_{12}}$

### 3. Énergie magnétique

#### 3.1. Coefficients d'inductance

Un circuit  $\mathcal{C}$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  produit en tout point un champ  $\mathbf{B}$  proportionnel à  $I$ . Le flux  $\Phi_S(\mathbf{B})$  à travers toute surface appuyée sur  $\mathcal{C}$  est donc proportionnel à  $I$ . De plus

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

ce flux est donc une caractéristique indépendante de  $S$  et on pose

$$\Phi = LI \tag{4.19}$$

où  $L$  est le coefficient d'auto-inductance, exprimé en henry (H), et correspond à un facteur géométrique.

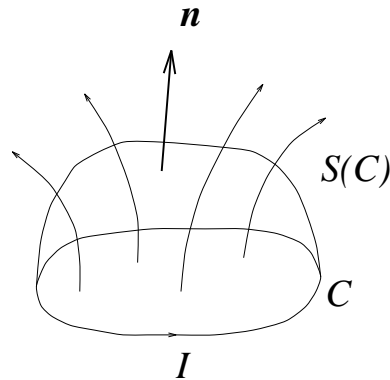


Figure 4.9 Flux du champ magnétique à travers un circuit filiforme.

**Exemples :**

i) Solénoïde parfait.

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I, \quad \Phi_1(B) = \mu_0 \frac{N}{\ell} S I, \quad \Phi_C(B) = \underbrace{\mu_0 \frac{N^2}{\ell} S I}_L.$$

ii) Inductance mutuelle fil infini – cadre rectangulaire.

On parle d'inductance mutuelle lorsque deux circuits sont en présence.

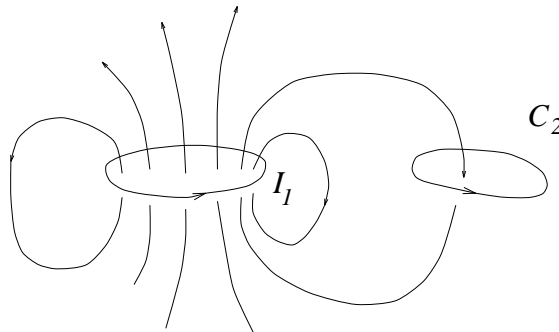


Figure 4.10 Influence mutuelle entre deux circuits.

Le courant  $I_1$  crée un champ  $B_1$  proportionnel à  $I_1$ , donc  $\Phi_{C_2}(\mathbf{B}_1)$  est aussi proportionnel à  $I_1$  :

$$\Phi_{C_2}(\mathbf{B}_1) = M_{21} I_1 \quad (4.20)$$

où  $\Phi_{C_2}$  est le flux à travers toute surface appuyée sur  $C_2$  et  $M_{21}$  le coefficient d'inductance mutuelle. La formule de Neumann établit l'égalité  $M_{21} = M_{12}$  <sup>(81)</sup> .

<sup>(81)</sup> En effet

$$\Phi_2(\mathbf{B}_1) = \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{r_{12}}$$

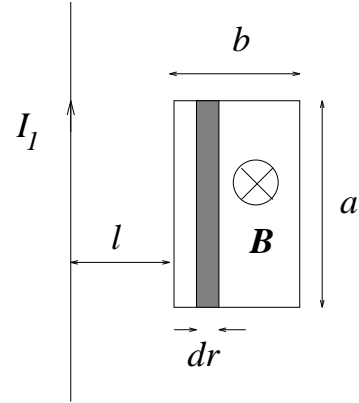
$$\Phi_2(\mathbf{B}_1) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}}}_{M_{21}} I_1$$

et on a une expression symétrique en 1 et 2 pour  $M_{12}$ , d'où la formule de Neumann.

A titre d'exemple, on peut exprimer le coefficient d'inductance mutuelle entre un cadre et un fil infini :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(B_1) &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} a \int_{\ell}^{\ell+b} \frac{dr}{r} \\ &= \underbrace{\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{\ell+b}{\ell}\right)}_{M_{21}} I_1. \end{aligned}$$



En électrostatique, les sources fondamentales sont les charges électriques. En magnétostatique ce sont les courants électriques<sup>(82)</sup>, ou, plus précisément, le flux  $\Phi$  du champ magnétique<sup>(83)</sup>. La constante fondamentale qui intervient est la perméabilité magnétique  $\mu_0$ , telle que  $[\mu_0] = \mathfrak{ML}^2\mathfrak{C}^{-2}$ ,  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$ , où le henry (H) sera défini un peu plus loin.

L'élément essentiel en électrostatique pour l'application aux circuits est le condensateur. Il est caractérisé par la capacité. En magnétostatique le composant de base est la bobine<sup>(84)</sup>. Il s'agit d'un fil conducteur parcouru par un courant et enroulé qui crée au milieu de l'enroulement un champ magnétique. Ce champ est lié au courant électrique (il est d'autant plus fort que l'intensité est élevée) et il en est de même du flux de ce champ. Comme en électrostatique, on définit un coefficient de proportionnalité, cette fois entre flux et intensité. Ce coefficient géométrique caractéristique est l'inductance ou auto-inductance, notée  $L$ . L'inductance permet d'établir une relation entre tension appliquée aux bornes de la bobine et intensité la parcourant.

De même qu'en électrostatique la capacité d'un condensateur permet d'exprimer simplement l'énergie électrique emmagasinée par le condensateur, en magnétostatique l'inductance d'une bobine permet d'exprimer simplement l'énergie magnétique emmagasinée par la bobine.

Les diverses analogies sont rassemblées dans le tableau suivant. On retiendra en particulier la relation fonctionnelle pour le bobine en régime variable

$$U(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (4.21)$$

où l'inductance, mesurée en henrys (H), vaut, dans l'approximation où l'on néglige les effets de bords,

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S,$$

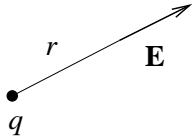
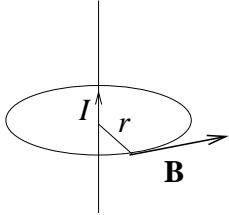
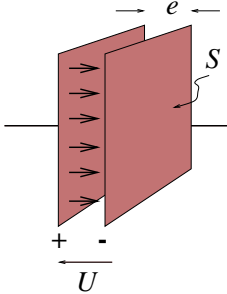
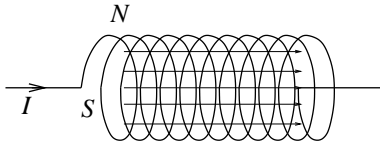
$N$  étant le nombre de spires total,  $l$  la longueur de la bobine et  $S$  sa section. Du point de vue dimensionnel, on a  $[L] = \mathfrak{ML}^2\mathfrak{C}^{-2}$ .

<sup>(82)</sup> Il faut noter qu'il n'existe aucun équivalent magnétique des charges électriques. Cette absence de ce que l'on appelle les monopôles magnétiques est à l'origine d'une certaine dissymétrie entre électricité et magnétisme.

<sup>(83)</sup> En électrostatique, les charges sont également reliées au flux du champ électrique par l'intermédiaire du théorème de Gauss.

<sup>(84)</sup> On emploie souvent le terme anglais "self" pour désigner une bobine.

Tableau 4.1 Analogies électrostatique-magnétostatique

Electrostatique	Magnétostatique
Charge ponctuelle	Fil infini
	
$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r$ $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{F.m}^{-1}$	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi$ $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H.m}^{-1}$
Condensateur	Bobine
	
surface $S$ , épaisseur $e$ $E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$ , $Q = CU$ $I = \frac{dQ}{dt}$ , $I = C \frac{dU}{dt}$ $\mathcal{U}_{\text{électrique}} = \frac{1}{2} CU^2$	section $S$ , nombre de spires $N$ $B = \frac{\Phi}{NS}$ , $\Phi = LI$ $U = \frac{d\Phi}{dt}$ , $U = L \frac{dI}{dt}$ $\mathcal{U}_{\text{magnétique}} = \frac{1}{2} LI^2$

### 3.2. Énergie

Un circuit parcouru par un courant stocke de l'énergie.

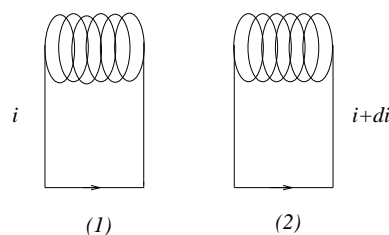


Figure 4.11 Variation du courant dans un circuit, associée à un gain d'énergie.

Pour passer des situations (1) à (2), le flux varie de  $Li$  à  $L(i + di)$ , soit  $d\Phi = L di$ . Par induction, une f.e.m.  $e = -L \frac{di}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$  s'oppose à cette augmentation de courant. Pour assurer l'augmentation de  $di$ , on imagine un générateur parfait de f.e.m.  $e' = -e = L \frac{di}{dt}$  qui fournit un travail

$$\delta W = e' i dt = i d\Phi = L i di$$

d'où l'énergie magnétique emmagasinée dans le circuit

$$\mathcal{U}_m = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}. \quad (4.22)$$

Contrairement à l'énergie électrostatique, d'origine potentielle, l'énergie magnétique est d'origine cinétique. En effet, pour augmenter la vitesse d'une particule de  $v$  à  $v + dv$ , celle-ci oppose une force d'inertie  $-m \frac{dv}{dt}$  compensée par une force extérieure  $F_{\text{ext}} = +m \frac{dv}{dt}$  qui assure l'augmentation de vitesse.

Avec  $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ , pour un circuit filiforme on a

$$u_m = \frac{1}{2} I \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}(S)} \mathbf{A} \cdot I d\mathbf{l} \quad (4.23)$$

que l'on généralise à un circuit quelconque

$$u_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \, d\tau \quad (4.24)$$

la somme étant étendue au volume des conducteurs.

En fonction du champ magnétique, on peut écrire une expression qui permet de définir une densité d'énergie magnétique proportionnelle au carré du champ magnétique. On a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \, d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} (\mathbf{rot} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} \, d\tau$$

et l'on transforme

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} - \text{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \\ &= B^2 - \text{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi une intégrale de volume et une intégrale étendue à la surface limitant ce volume :

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} B^2 \, d\tau - \oint_{S(\Omega)} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Si l'on fait tendre le volume vers l'infini, l'intégrale de départ ne contribue pas davantage car elle est limitée au domaine où règnent les densités de courant. Dans cette limite, on a également  $S \rightarrow \infty$  et s'il n'y a pas de courant à l'infini, on obtient au mieux des comportements en  $A \sim \frac{1}{r}$  et  $B \sim \frac{1}{r^2}$ , soit  $\oint_{S \rightarrow \infty} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \rightarrow 0$  et il ne subsiste que l'intégrale de volume

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{espace } \infty} B^2 \, d\tau. \quad (4.25)$$

La quantité  $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$  est la densité d'énergie magnétique associée à l'existence du champ.



## 4. Analogies électrostatique-magnétostatique

ÉLECTROSTATIQUE	MAGNÉTOSTATIQUE
<b>Champ</b>	
Coulomb $\mathbf{E}(2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(1) d\tau \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}$	Biot et Savart $\mathbf{B}(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j} d\tau \wedge \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3}$
<b>Potentiel</b>	
$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ $\mathbf{E} = -\nabla\phi$	$\text{div } \mathbf{B} = 0$ $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$
si $\Omega$ est infini :	
$\phi(2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(1) d\tau}{r_{12}}$	$\mathbf{A}(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}(1) d\tau}{r_{12}}$
<b>Équation de Poisson</b>	
$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ $\Delta\phi + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$	$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ $\Delta\mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} = \mathbf{0}$
<b>Théorèmes</b>	
$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ $\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{\text{int}}$	$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ $\mathcal{C}_C(\mathbf{B}) = \mu_0 \sum I_{\text{enlacés}}$
<b>Énergie</b>	
$\mathcal{U}_e = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$ $\mathcal{U}_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(1) \phi(1) d\tau$ $\mathcal{U}_e = \frac{1}{2} \int_{\text{espace } \infty} \epsilon_0 E^2 d\tau$	$\mathcal{U}_m = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$ $\mathcal{U}_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{j}(1) \mathbf{A}(1) d\tau$ $\mathcal{U}_m = \frac{1}{2} \int_{\text{espace } \infty} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau$
<b>Dipôle</b>	
$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ $\text{div } \mathbf{E} = 0$	$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}$ $\text{div } \mathbf{B} = 0$
$\phi(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$	$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \wedge \mathbf{r}}{r^3}$
$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ $E_{\theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$	$B_r = \frac{2\mu_0 M \cos \theta}{4\pi r^3}$ $B_{\theta} = \frac{\mu_0 M \sin \theta}{4\pi r^3}$

# Chapitre 5

## Magnétostatique des milieux magnétiques

On présente les principales propriétés des matériaux magnétiques : paramagnétisme, diamagnétisme, ferromagnétisme ou supraconductivité. L'approche est tout d'abord microscopique avant d'introduire l'aspect macroscopique.

### 1. Dipôle magnétique

#### 1.1. Dipôle magnétique élémentaire

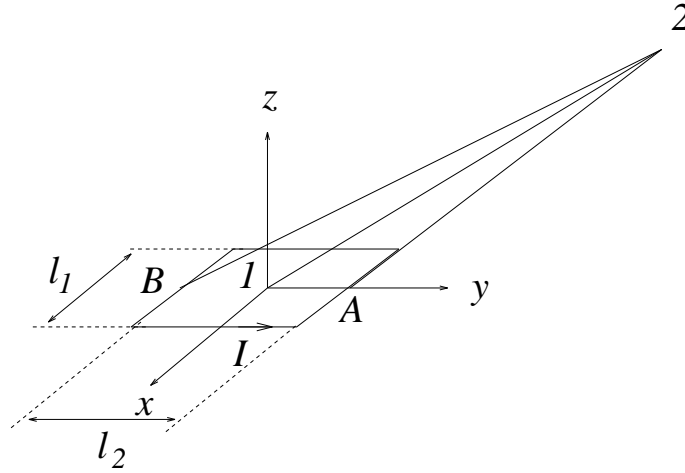
Les atomes ou les ions peuvent posséder un moment magnétique propre susceptible de s'orienter dans un champ magnétique extérieur. Cela donne lieu aux phénomènes de paramagnétisme et ferromagnétisme. De plus, à cause des phénomènes d'induction, l'application d'un champ  $\mathbf{B}$  entraîne la création d'un moment magnétique opposé au champ. C'est l'origine du diamagnétisme. L'ensemble des phénomènes physiques liés au magnétisme repose sur la notion de dipôle magnétique.

$$\begin{aligned}
 A_x(2) &= \frac{\mu_0 I \ell_1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \\
 &= \frac{\mu_0 I \ell_1}{4\pi} \underbrace{\nabla_1 \left( \frac{1}{r_{12}} \right)}_{\frac{y_{12}}{r_{12}^3} (-\ell_2)} \cdot \mathbf{AB}.
 \end{aligned}$$

On introduit le moment magnétique équivalent à la boucle de courant,  $\mu = IS\mathbf{n}$ , avec  $S = l_1 l_2$ , soit

$$\begin{cases} A_x(2) &= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \left( -\frac{y_{12}}{r_{12}^3} \right) \\ A_y(2) &= \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \left( +\frac{x_{12}}{r_{12}^3} \right) \\ A_z(2) &= 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{A}(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mu \wedge \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mu \wedge \nabla_1 \left( \frac{1}{r_{12}} \right). \quad (5.1)$$



**Figure 5.1** Spire rectangulaire parcourue par un courant et assimilable à un dipôle magnétique à grande distance.

### Remarques :

i) Démonstration générale : pour une spire de forme quelconque, on calcule la projection dans une direction  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$ , où  $\mathbf{u}$  est unitaire dans la direction donnée.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{r} \mathbf{u}$$

où  $\oint_C d\mathbf{l} \cdot \frac{\mathbf{u}}{r} = \iint_{S(C)} \mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{u}}{r} \right) \cdot d\mathbf{S}$  et  $\mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{u}}{r} \right) = \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \wedge \mathbf{u}$ , soit

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{S(C)} \mathbf{u} \wedge \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathbf{u} \cdot \iint_{S(C)} d\mathbf{S} \wedge \nabla \left( \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Pour une petite boucle, on peut approximer par

$$\mathbf{A} = \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S d\mathbf{S} \right) \wedge \nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mu \wedge \nabla \left( \frac{1}{r} \right)$$

avec  $\mu = I \iint_S d\mathbf{S} = IS\mathbf{n}$ .

ii) Champ magnétique : on utilise les composantes de **rot** en coordonnées cartésiennes, il vient :

$$\begin{cases} B_x(2) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \left( \frac{3xz}{r^5} \right)_{12} \\ B_y(2) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \left( \frac{3yz}{r^5} \right)_{12} \\ B_z(2) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \left( \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right)_{12} \end{cases}$$

Formule générale :

$$\mathbf{B}(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r}_{12})\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r_{12}^3} \right). \quad (5.2)$$

iii) Dipôle magnétique dans un champ extérieur : dans le cas d'un champ uniforme, on montre facilement que le couple et l'énergie d'interaction avec le champ extérieur valent :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\mu} \wedge \mathbf{B}$$

$$\mathcal{U} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

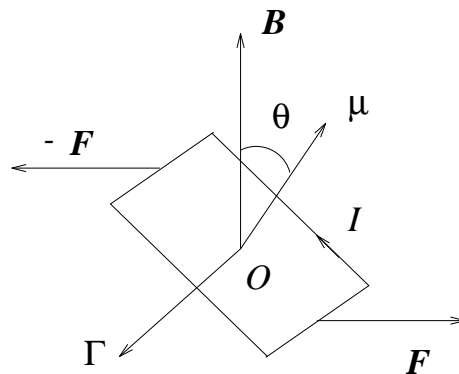


Figure 5.2 Bilan des forces agissant sur la spire.

Dans un champ non uniforme, il apparaît de plus une résultante non nulle des forces

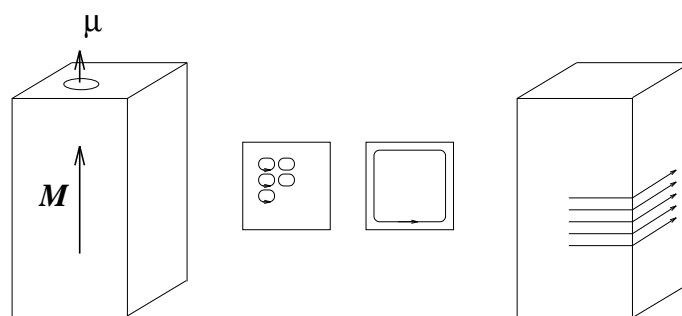
$$\mathbf{F} = -\nabla \mathcal{U} = +\nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}).$$

iv) Exemple : expérience de Stern et Gerlach.

Des moments  $\boldsymbol{\mu}$  placés dans un gradient de  $\mathbf{B}$  suivant  $Oz$  sont soumis à une force suivant  $z$  :

$$F_z = +\frac{\partial}{\partial z}(\mu_z B_z) = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

v) Courants ampériens : l'analogie boucle de courant  $\longleftrightarrow$  moment magnétique sera d'une grande utilité pour traiter les matériaux aimantés comme assemblées de moments élémentaires. Dans l'exemple d'un matériau aimanté uniformément, chaque moment élémentaire se comporte comme une petite boucle de courant. Il y a compensation des courants équivalents en volume et seule persiste une densité surfacique appelée courant ampérien.



**Figure 5.3** Utilisation de courants ampériens pour décrire l'effet d'une aimantation uniforme.

## 1.2. Potentiel scalaire magnétique

L'expression du champ  $\mathbf{B}$  créé par un moment magnétique est analogue à celle du champ  $\mathbf{E}$  du dipôle électrostatique. L'analogie repose sur le fait que, dans les deux cas, loin du dipôle, on a  $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}$  ( $\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ) et  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  ( $\text{div } \mathbf{E} = 0$ ). On peut donc définir des “masses magnétiques” et un potentiel scalaire magnétique  $\phi_m$ .

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

soit<sup>(85)</sup>

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla_2 \phi_m$$

$$\phi_m(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \mu \nabla_2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right), \quad \mu = \mu \mathbf{d}.$$

Cette analogie sera elle aussi utile pour traiter les milieux aimantés.

En fait, en tout point  $\mathbf{r}$  où la densité de courant  $\mathbf{j}$  est nulle,  $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}$  permet de définir  $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \phi_m$  et donc, sur un contour fermé n'entourant pas de courant,  $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ . Attention, si un courant traverse  $C$ ,  $\phi_m$  est une fonction multiforme.

**Exemple :**  
Fil infini

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{u}_\varphi = -\mu_0 \left( \frac{\partial \phi_m}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_m}{\partial \varphi} \mathbf{u}_\varphi + \frac{\partial \phi_m}{\partial z} \mathbf{u}_z \right)$$

$$\phi_m(\varphi) = -\frac{I\varphi}{2\pi} + \text{cte}$$

soit

$$\begin{aligned} \phi_m(0) &= 0 && (\text{cte choisie nulle}) \\ \phi_m(2\pi) &= -I \\ &\vdots \end{aligned}$$

<sup>(85)</sup> Le choix du préfacteur  $\mu_0$  dans la définition de  $\phi_m$  est arbitraire.

## 2. Aspects microscopiques du magnétisme dans la matière

### 2.1. Moments magnétiques des atomes et des ions

#### 2.1.1. Moment orbital

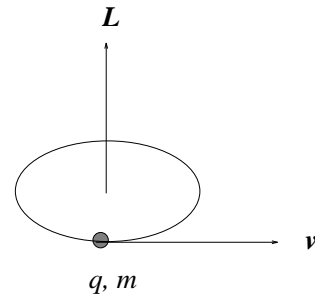
Un atome de moment cinétique  $\mathbf{L}$  (contribution orbitale due au moment cinétique des électrons) possède aussi un moment magnétique  $\mu_L$ . On peut en donner une image quasi-classique en assimilant l'ensemble des contributions électroniques à une orbite circulaire de rayon  $r$  :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}, \quad L = mvr$$

$$\mu_L = I \cdot S = \frac{1}{2} qvr = \frac{q}{2m} L$$

avec

$$I = \frac{q}{T} = \frac{q}{2\pi r/v}, \quad S = \pi r^2.$$



On obtient ainsi un moment magnétique à la condition qu'il existe un moment cinétique non nul associé à des particules chargées en mouvement <sup>(86)</sup> :

$$\mu_L = \frac{q}{2m} \mathbf{L}. \quad (5.3)$$

En mécanique quantique, la composante  $\hat{L}_z$  du moment cinétique <sup>(87)</sup> ne peut prendre que des valeurs propres quantifiées, on remplace donc  $L$  par  $\hbar m_z$  de sorte qu'il vient

$$\mu_{L_z} = \frac{q}{2m} L_z.$$

Pour des électrons,  $q = -|q_e|$ , donc moments cinétique et magnétique sont antiparallèles  $\mu_L \swarrow \searrow \mathbf{L}$ . On écrit alors

$$\mu_{L_z} = -\frac{|q_e| \hbar}{2m_e} m_z \quad (5.4)$$

avec  $\frac{|q_e| \hbar}{2m_e} = \mu_B$  le magnéton de Bohr, unité caractéristique du moment magnétique électronique ( $\mu_B = 0.927 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2$ ). En tenant compte du fait qu'en mécanique

<sup>(86)</sup> On peut noter que, malgré sa charge nulle, le neutron possède un moment magnétique. C'est un argument en faveur de la constitution interne du neutron, composé de particules chargées (les quarks) dont les charges se compensent globalement.

<sup>(87)</sup> En mécanique quantique, le moment cinétique est caractérisé par quatre opérateurs  $\mathbf{L}^2$ ,  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  et  $\hat{L}_z$  qui constituent une algèbre de Lie :  $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$ ,  $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \hat{L}_k$ . On choisit conventionnellement une base d'états propres communs à  $\hat{L}^2$  et  $\hat{L}_z$ , notée  $\{|\ell, m_z\rangle\}$ , et telle que  $\hat{L}^2 |\ell, m_z\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1)$  et  $\hat{L}_z |\ell, m_z\rangle = \hbar m_z |\ell, m_z\rangle$ .

quantique le moment cinétique prend des valeurs quantifiées  $-L \leq m_z \leq +L$ , on a  $\mu_B L \geq \mu_{L_z} \geq -\mu_B L$  où  $L$  est la valeur maximale de  $m_z$ .

Pour les atomes à plusieurs électrons, on doit sommer les contributions orbitales monoélectroniques et introduire une projection totale  $M_z = \sum_{\text{électrons}} m_z$ . On remarque en particulier que les orbitales électroniques saturées ont un moment orbital total nul et ne contribuent par conséquent pas au magnétisme<sup>(88)</sup>.

Dans le cas de noyaux et du magnétisme nucléaire, on introduit le magnéton nucléaire

$$\mu_n = \frac{|q| \hbar}{2m_n} \sim 10^{-26} \text{ Am}^2,$$

beaucoup plus faible, ce qui permet en première approximation de négliger les effets du noyau dans l'étude du magnétisme des atomes.

### 2.1.2. Moment cinétique de spin

L'électron possède également un spin, moment cinétique intrinsèque  $\mathbf{S}$ . Le raisonnement précédent conduirait à une contribution supplémentaire

$$\mu_S = -\frac{|q_e| \hbar}{2m_e} \mathbf{S}.$$

En fait, la théorie de Dirac corrige cette expression par le facteur de Landé de l'électron  $g_e \simeq 2$ <sup>(89)</sup> et il vient :

$$\mu_S = -g_e \frac{|q_e| \hbar}{2m_e} \mathbf{S} = -\frac{|q_e| \hbar}{m_e} \mathbf{S}. \quad (5.5)$$

Comme  $S_z \rightarrow \pm \frac{1}{2} \hbar$ <sup>(90)</sup>

$$\mu_{S_z} = \mp 2 \frac{|q_e| \hbar}{2m_e} \frac{1}{2} = \mp \mu_B. \quad (5.6)$$

Ici encore, lorsque l'on considère un atome à plusieurs électrons, il convient de sommer les contributions individuelles  $M_s = \sum_{\text{électrons}} m_s$ . Une orbitale saturée ne contribue pas au magnétisme de spin. Une orbitale à demi-remplie en revanche contribue à la valeur maximale :  $M_s = \frac{1}{2}(2\ell + 1)\hbar$ , conformément aux règles de Hund présentées plus loin.

### 2.1.3. Moment cinétique total

On définit en général le moment cinétique total  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  pour éviter de discuter séparément les contributions orbitale et de spin. En mécanique quantique, l'addition des moments cinétiques obéit à des règles de construction plus délicates que les simples sommes vectorielles, ce qui amène à introduire un facteur de Landé atomique  $g_J$  qui permet d'écrire

$$\mu_J = -g_J \frac{|q_e| \hbar}{2m_e} \mathbf{J} \quad (5.7)$$

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (5.8)$$

où  $L$  et  $S$  se réfèrent aux moments cinétiques orbital et de spin de l'ensemble des électrons.

<sup>(88)</sup> En mécanique quantique, les règles d'addition des moments cinétiques ne sont pas de simples règles vectorielles comme en physique classique, mais on peut toutefois obtenir la projection du moment cinétique orbital total en sommant les valeurs des  $m_z$  de chaque électron. Une orbitale saturée a donc un moment orbital total nul, par exemple sur une orbitale  $3d$  complète :  $\sum_{m_z=-2}^2 m_z = 0$ .

<sup>(89)</sup>  $g_e = 2$  + des corrections d'électrodynamique quantique.

<sup>(90)</sup> Les électrons sont des particules de spin  $\frac{1}{2}$  qui correspondent à  $s = \frac{1}{2}$  et  $m_s = \pm \frac{1}{2}$ , la base étant notée  $|s, m_s\rangle$ .

### 2.1.4. Règle de Hund

Dans le cas des atomes à plusieurs électrons, il est impératif de connaître les valeurs permises de  $J$  pour calculer le moment magnétique atomique. Seule la dernière couche incomplète participe au magnétisme. Les couches saturées n'ont aucune contribution. Des compensations conduisent à  $L = 0$ ,  $S = 0$ ,  $J = 0$ . On peut en comprendre l'origine en remplissant tous les états électroniques conformément au principe de Pauli et voir qu'il en résulte bien un moment cinétique total nul. Dans la dernière couche, lorsqu'elle est insaturée, il peut exister un grand nombre de manières de placer les  $n$  électrons dans les  $2(2\ell + 1)$  états disponibles ( $\uparrow$  et  $\downarrow$  et dégénérescence orbitale) :

$$\begin{array}{llll} \text{état} & s & \ell = 0 & 2 \times (1) = 2 \\ & p & \ell = 1 & 2 \times (3) = 6 \\ & d & \ell = 2 & 2 \times (5) = 10 \end{array}$$

Pour obtenir le remplissage *dans l'état fondamental*, on utilise les règles empiriques de Hund.

1<sup>ère</sup> règle de Hund :

Les configurations d'énergie minimale sont celles qui ont le spin total  $S$  le plus élevé.

2<sup>ème</sup> règle de Hund :

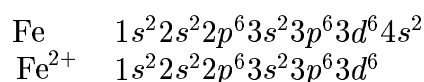
Le moment orbital total  $L$  doit être maximum compte-tenu de (1) et du principe de Pauli.

3<sup>ème</sup> règle de Hund :

On a  $L$  et  $S$  d'après les règles précédentes. Le moment cinétique total  $\mathbf{J}$  est déterminé par  $J = |L - S|$  pour une couche moins qu'à demi-remplie ou à demi-remplie,  $J = L + S$  sinon.

#### Exemple :

Cas du fer :  $\text{Fe}^{2+}$ ,  $26 - 2 = 24 e^-$



Les 6 électrons de l'orbitale  $3d$  se placent conformément aux règles de Hund :

$$\begin{array}{cccccc} m_{\ell_z} & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ m_{s_z} & \boxed{\uparrow\downarrow} & \boxed{\uparrow} & \boxed{\uparrow} & \boxed{\uparrow} & \boxed{\uparrow} \end{array}$$

$$S = 2, \quad L = 2, \quad J = 4.$$

La notation spectroscopique  $^{2S+1}L_J$  résume ces données<sup>(91)</sup>. Ici, on a une configuration

$${}^5D_4.$$

<sup>(91)</sup> Les lettres  $S$ ,  $P$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $G$ , ... (Stark, Principal, Diffuse, Fundamental, ...) se réfèrent successivement aux valeurs  $L = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$



On voit que les atomes sont susceptibles de porter un moment magnétique permanent si dans l'état fondamental le moment cinétique total est non nul. Il faut toutefois tenir compte des effets de température. A température non nulle, les états excités peuvent être partiellement occupés conformément au poids de Boltzmann à condition que l'écart en énergie par rapport au fondamental ne soit pas trop élevé. Dans ces conditions, si les états excités peuplés ont un moment cinétique non nul, il peut apparaître un paramagnétisme alors que le fondamental est non magnétique. C'est le cas par exemple de  $\text{Eu}^{3+}$ .

**Exemple :**

Application aux 15 terres-rares : on effectue le remplissage progressif de la couche  $4f$  ( $\ell = 3$ ).

**Tableau 5.1** Etat fondamental des Terres-rares conformément aux règles de Hund.

$n$	TR	3	2	1	0	-1	-2	-3	$S$	$L$	$J$	$^{2S+1}L_J$
0	$\text{La}^{3+}$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	0	0	0	$^1S_0$
1	$\text{Ce}^{3+}$	$\uparrow$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1/2	3	5/2	$^2F_{5/2}$
2	$\text{Pr}^{3+}$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	1	5	4	$^3H_4$
3	$\text{Nd}^{3+}$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	3/2	6	9/2	$^4I_{9/2}$
4	$\text{Pm}^{3+}$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\square$	$\square$	$\square$	2	6	4	$^5I_4$
5	$\text{Sm}^{3+}$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\square$	$\square$	5/2	5	5/2	$^6H_{5/2}$
6	$\text{Eu}^{3+}$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\square$	3	3	0	$^7F_0$
7	$\text{Gd}^{3+}$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	7/2	0	7/2	$^8S_{7/2}$
8	$\text{Tb}^{3+}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	3	3	6	$^7F_6$
9	$\text{Dy}^{3+}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	5/2	5	15/2	$^6H_{15/2}$
10	$\text{Ho}^{3+}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	2	6	8	$^5I_8$
11	$\text{Er}^{3+}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	3/2	6	15/2	$^4I_{15/2}$
12	$\text{Tm}^{3+}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	1	5	6	$^3H_6$
13	$\text{Yb}^{3+}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow$	1/2	3	7/2	$^2F_{7/2}$
14	$\text{Lu}^{3+}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	0	0	0	$^1S_0$

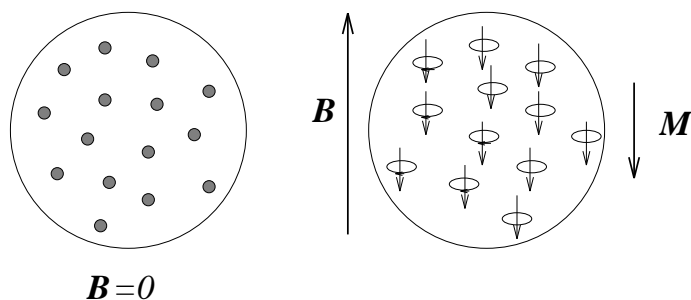
## 2.2. Matériaux diamagnétiques

Toutes les substances ont une composante diamagnétique associée au mouvement orbital des électrons (même pour les couches incomplètes). Celle-ci est d'autant plus facile à mesurer que la substance n'est pas paramagnétique. On traite le diamagnétisme en considérant la réponse d'un atome à l'application d'un champ magnétique, on somme ensuite sur le nombre d'atomes pour obtenir la susceptibilité diamagnétique de l'échantillon. On supposera que l'atome ne porte pas de moment permanent.

Quand on applique un champ magnétique  $\mathbf{B}$  à un atome, il apparaît un moment magnétique  $\mu$  opposé à  $\mathbf{B}$  d'après la loi de Lenz. Il en résulte une aimantation  $\mathbf{M}$  s'il y a  $N$  atomes par unité de volume :

$$\mathbf{M} = N\mu = \chi_m \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}, \quad \chi_m < 0 \quad (5.9)$$

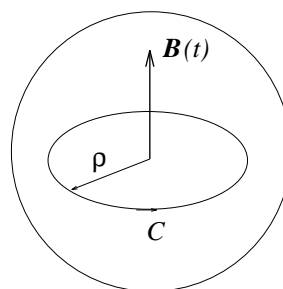
où  $\chi_m$  est la susceptibilité magnétique.



**Figure 5.4** Apparition d'une aimantation opposée au sens du champ dans le diamagnétisme.

On calcule  $\chi_m$  en appliquant un champ variable  $\mathbf{B}(t)$  à un atome dont la distribution électronique est supposée à symétrie sphérique. Ce champ définit la direction  $Oz$ . Il en résulte un champ électromoteur orthoradial  $\mathbf{E} = E(\rho)\mathbf{u}_\varphi$  donné par les équations de Maxwell :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

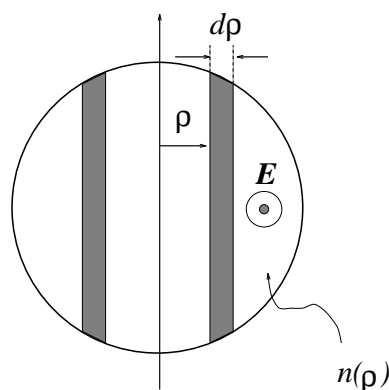


$$\oint_C \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(C)} \mathbf{B} d\mathbf{S}.$$

Dans l'hypothèse où le champ magnétique  $B(t)$  est uniforme sur le volume de l'atome, on a alors

$$2\pi\rho E(\rho) = -\frac{\partial}{\partial t}(\pi\rho^2 B(t)), \quad \mathbf{E}(\rho) = -\frac{1}{2}\rho \frac{\partial B}{\partial t} \mathbf{u}_\varphi.$$

Il en résulte une force de Coulomb agissant de même manière sur tous les électrons compris entre les distances  $\rho$  et  $\rho + d\rho$  de l'axe de symétrie



**Figure 5.5** Calcul du couple agissant sur les électrons d'un atome sous l'effet d'un champ magnétique variable.

$$d\mathbf{F}(\rho) = n(\rho) d\rho \times (-|q_e|) \mathbf{E}(\rho)$$

où  $n(\rho) d\rho$  est le nombre d'électrons à la distance  $\rho$  <sup>(92)</sup>. On obtient un couple élémentaire résultant colinéaire à  $\mathbf{B}$  :

$$d\Gamma = \rho \mathbf{u}_\rho \wedge d\mathbf{F}(\rho), \quad d\Gamma = \rho dF(\rho)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} |q_e| \frac{\partial B}{\partial t} \underbrace{\int n(\rho) \rho^2 d\rho}_{Z \langle \rho^2 \rangle}$$

En utilisant les moyennes  $\langle \rho^2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle$ , il vient finalement, pour un atome à  $Z$  électrons,

$$\Gamma = \frac{1}{2} Z |q_e| \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

En vertu du théorème du moment cinétique,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \Gamma = \frac{Z |q_e| \langle r^2 \rangle}{3} \frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

On peut identifier la contribution au moment cinétique induite par le champ magnétique

$$\mathbf{L} = \frac{Z |q_e| \langle r^2 \rangle}{3} \mathbf{B}$$

Il s'agit d'un moment orbital, d'où l'on déduit le moment magnétique orbital dit de Langevin :

$$\mu_L = -\frac{|q_e|}{2m_e} \mathbf{L} = -\frac{Z |q_e|^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} \mathbf{B} \quad (5.10)$$

La susceptibilité diamagnétique pour  $N$  atomes s'écrit :

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 N Z q_e^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} \quad (5.11)$$

C'est une quantité sans dimension. L'ordre de grandeur est de  $\chi_m \sim -10^{-5} \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  ou  $\text{cm}^3/\text{mol}$  en phase liquide <sup>(93)</sup>. En phase gazeuse, la modification dominante provient de la densité beaucoup plus faible et la susceptibilité est d'ordre  $\chi_m \sim -10^{-9} \text{ cm}^3/\text{cm}^3$  <sup>(94)</sup>. Si l'on néglige les variations thermiques de la densité, la susceptibilité diamagnétique est pratiquement indépendante de la température.

<sup>(92)</sup> En mécanique quantique,  $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$  si la fonction d'onde électronique est  $\psi(\mathbf{r})$ .

<sup>(93)</sup> Si l'on cherche l'équation aux dimensions  $[\chi_m] : \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$  soit  $[\mu_0] = \frac{T^2 L^{-2}}{[\epsilon_0]}$  et  $\frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 r} = ML^2 T^{-2}$  soit  $[\frac{\mu_0 q^2}{m_e}] = L$  qui donne finalement  $[\chi_m] = NL^3$ .

<sup>(94)</sup> Ce phénomène est masqué par le paramagnétisme (voir paragraphe suivant) lorsque celui-ci existe.

**Tableau 5.2** Exemples de susceptibilités diamagnétiques mesurées.

ions (phase liquide)	$\chi_m$ en $\text{cm}^3/\text{mol}$
Li <sup>+</sup>	$-0.7 \times 10^{-6}$
Na <sup>+</sup>	$-6.1 \times 10^{-6}$
K <sup>+</sup>	$-14.6 \times 10^{-6}$
Rb <sup>+</sup>	$-22.0 \times 10^{-6}$
Cs <sup>+</sup>	$-35.1 \times 10^{-6}$

On peut également prendre en compte le champ créé par les courants ampériens : la matière, soumise au champ appliqué  $B_{\text{app}}$ , s'aimante. Il en résulte une description en termes de courants ampériens qui créent un champ ampérien  $B_a$  :

$$B_{\text{tot}} = \underbrace{B_{\text{app}}}_{\text{appliqué}} + \underbrace{B_a}_{\text{ampérien}}$$

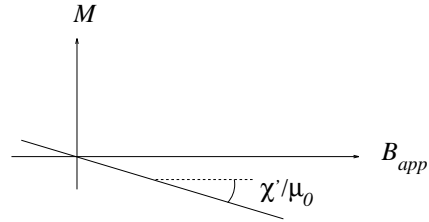
et  $\chi_m$  caractérise la réponse au champ total :

$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{\mathbf{B}_{\text{tot}}}{\mu_0} = \chi_m \frac{\mathbf{B}_{\text{app}} + \mathbf{B}_a}{\mu_0}.$$

Lorsque l'aimantation  $\mathbf{M}$  est uniforme, on peut montrer que dans la matière le champ ampérien est proportionnel à l'aimantation,  $\mathbf{B}_a = \zeta \mu_0 \mathbf{M}$ , où  $\zeta$  est un coefficient géométrique de l'ordre de 1 (c'est un résultat analogue au champ dépolarisant dans les milieux polarisés). Or, il est plus commode de tracer  $M$  en fonction de  $B_{\text{app}}$  (contrôlé par l'expérimentateur) :

$$M = \chi_m \left( \frac{B_{\text{app}}}{\mu_0} + \zeta M \right)$$

$$M = \frac{\chi_m / \mu_0}{1 - \zeta \chi_m} B_{\text{app}} = \frac{\chi'_m}{\mu_0} B_{\text{app}}.$$

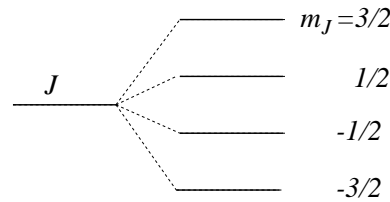


Comme  $|\chi_m| \ll 1$ , soit  $\chi'_m \simeq \chi_m$ , on peut tracer en fonction de  $B_{\text{app}}$  et non  $B_{\text{tot}}$  sans prendre de précaution particulière.

### 2.3. Matériaux paramagnétiques

Considérons une assemblée d'ions dont l'état fondamental est caractérisé par un moment cinétique  $\mathbf{J}$  et de moment magnétique permanent  $\mu_J = -g_J \mu_B \frac{\mathbf{J}}{\hbar}$ . Dans la situation la plus fréquente, les états excités ont une énergie beaucoup plus élevée et ne sont pratiquement pas occupés à température ordinaire, seul l'état fondamental contribue donc au magnétisme. Sous l'action d'un champ  $\mathbf{B}$ , les moments acquièrent une énergie  $\mathcal{U}_{J_z} = -\mu_J \mathbf{B} = g_J m_J \mu_B B$  où  $m_J \in \{-J, -(J-1), \dots, +J\}$ , ( $2J+1$  valeurs), ce qui lève la dégénérescence entre niveaux dans l'état fondamental (effet Zeeman).

Dans une assemblée d'atomes, chacun de ces niveaux est peuplé avec une probabilité proportionnelle à  $\exp(-\mathcal{U}_{J_z}/k_B T)$  conformément à une statistique de Maxwell-Boltzmann (c'est-à-dire que chaque atome est dans un état défini, mais la distribution en énergie des atomes obéit à la loi exponentielle).



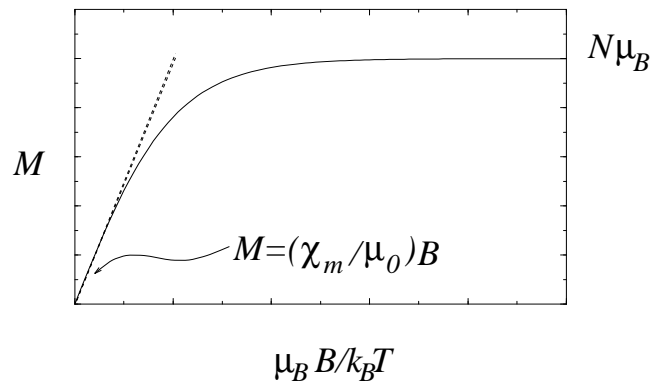
**Figure 5.6** Les différents états d'un moment cinétique 3/2.

Considérons par exemple le cas d'atomes caractérisés par  $J = 1/2$ ,  $g_J = 2$  (cela peut être le cas pour des moments dont l'origine est purement de spin). Le moment peut prendre les valeurs  $\pm\mu_B$  avec la probabilité  $\exp\left(\mp\frac{\mu_B B}{k_B T}\right)$ . On fait un calcul analogue à la polarisation d'orientation dans les cristaux ioniques, il vient :

$$M = N\langle\mu\rangle = N\mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B}{k_B T}\right) \quad (5.12)$$

où  $\langle\mu\rangle$  a été obtenu par <sup>(95)</sup> :

$$\langle\mu\rangle = \frac{\sum_{\mu=\pm\mu_B} \mu e^{-(-\mu B)/k_B T}}{\sum_{\mu=\pm\mu_B} e^{-(-\mu B)/k_B T}}.$$



**Figure 5.7** Allure de l'aimantation d'un paramagnétique.

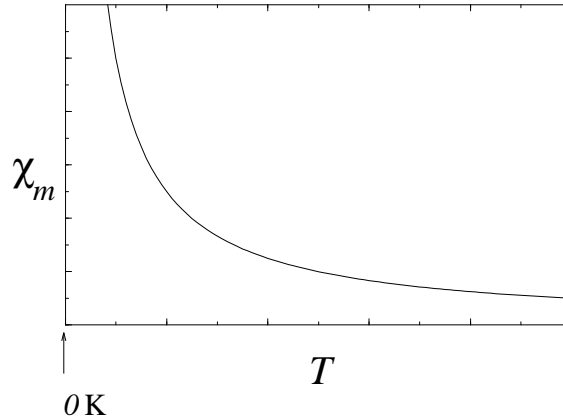
Pour des valeurs ordinaires du champ <sup>(96)</sup>, on linéarise la tangente hyperbolique,  $M \simeq \mu_0 \frac{N\mu_B^2}{k_B T} \left(\frac{B}{\mu_0}\right)$  d'où découle l'expression de la susceptibilité paramagnétique d'une assemblée de spins 1/2 :

$$\chi_m = \mu_0 \frac{N\mu_B^2}{k_B T}. \quad (5.13)$$

<sup>(95)</sup> Avec des moments magnétiques classiques, on a un phénomène du type aimantation par orientation et on obtient une fonction de Langevin comme pour la polarisation d'orientation dans les fluides. Contrairement au cas des milieux diélectriques, ce calcul n'a aucune légitimité pour les systèmes magnétiques qui sont par nature quantifiés.

<sup>(96)</sup> A température ambiante, il faudrait un champ de 435 T pour que l'énergie magnétique soit du même ordre que l'énergie thermique. Pour une valeur plus réaliste du champ magnétique,  $B = 1$  T, l'énergie thermique cesse de dominer au-dessous de 0.7 K.

Cette expression prend la forme d'une loi de Curie en  $1/T$ , elle définit la susceptibilité paramagnétique.



**Figure 5.8** Susceptibilité paramagnétique (loi de Curie).

$\chi_m > 0$ ,  $\chi_m \simeq 10^{-3} \text{ cm}^3/\text{mol}$  à température ambiante. La différence essentielle par rapport au diamagnétisme (en dehors du signe) provient de la dépendance en température. A température ambiante, le paramagnétisme est environ 500 fois supérieur au diamagnétisme qui est donc masqué.

**Remarque :**

Paramagnétisme de Brillouin.

Pour un moment arbitraire, mais quantifié, on obtient

$$M = Ng_J J \mu_B B_J(x),$$

$$B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth\left(\frac{2J+1}{2J}x\right) - \frac{1}{2J} \coth\left(\frac{x}{2J}\right),$$

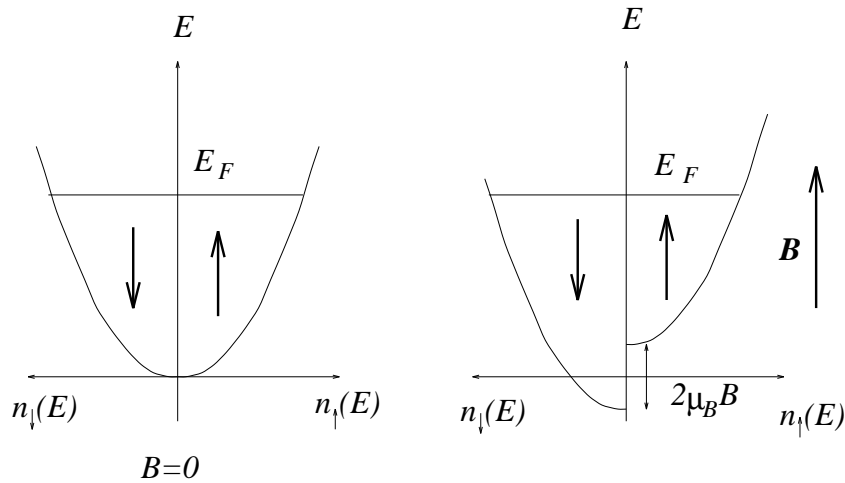
$$x = \frac{g_J J \mu_B B}{k_B T},$$

ce qui est vérifié expérimentalement avec une grande précision<sup>(97)</sup>.

## 2.4. Magnétisme des électrons libres

Dans un matériau métallique, les électrons de conduction sont très faiblement liés aux ions du réseau cristallin et l'on peut les considérer comme libres en bonne approximation. La courbe de densité d'état en énergie pour des électrons libres est une parabole. On peut distinguer les deux orientations de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$ .

<sup>(97)</sup> Il faut toutefois noter que dans les solides formés à partir des métaux de transition de la première série (c'est le cas du chrome par exemple), des effets dits de champ cristallin, d'origine électrique, se couplent aux degrés de liberté orbitaux, ce qui a pour effet de "geler" le moment cinétique orbital à une valeur nulle. Dans ce cas, le magnétisme observé est essentiellement d'origine de spin.



**Figure 5.9** Remplissage des bandes de spins up et down pour un gaz d'électrons libres.

Le remplissage des états électroniques s'effectue jusqu'au niveau de Fermi. Sous champ, il y a remplissage majoritaire des spins antiparallèles au champ (dont le moment magnétique est alors dans le sens du champ).

$$M \simeq \underbrace{(N_{\downarrow} - N_{\uparrow})}_{2\mu_B B n(E_F)} \underbrace{m_{sz}}_{\mu_B} = 2\mu_B^2 n(E_F) B = \chi_P \frac{B}{\mu_0}.$$

Ce qui définit la susceptibilité paramagnétique de Pauli <sup>(98)</sup> :

$$\chi_P \simeq 2\mu_0 \mu_B^2 n(E_F). \tag{5.15}$$

### 2.5. Refroidissement par désaimantation adiabatique

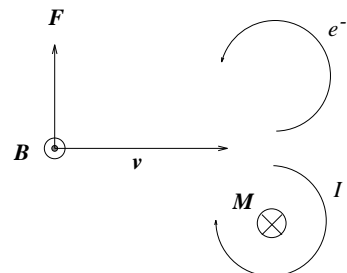
Le refroidissement d'un fluide s'effectue par une succession de compressions isothermes suivies de détente adiabatiques :

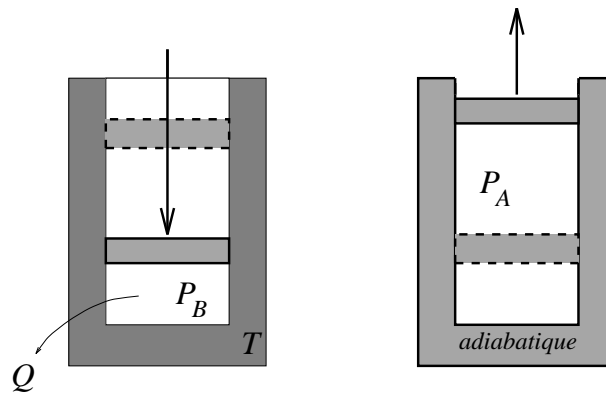
<sup>(98)</sup> Les électrons libres ont également une contribution diamagnétique dont on peut donner une image classique sous forme de boucles de courants équivalents :

Un calcul dans le cadre de la mécanique quantique donne un résultat simple pour la susceptibilité paramagnétique de Landau :

$$\chi_L = -\frac{1}{3}\chi_P. \tag{5.14}$$

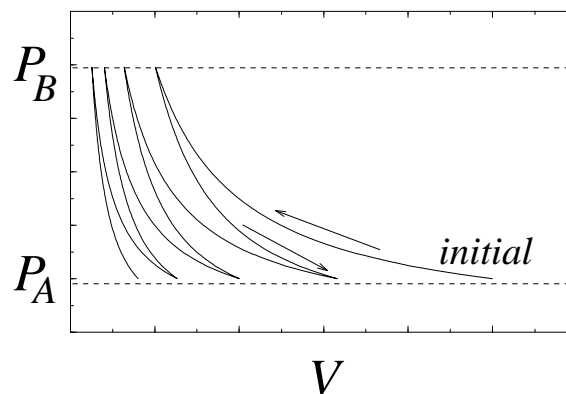
Cet effet est toujours présent pour les électrons de conduction en même temps que la contribution paramagnétique.





**Figure 5.10** Refroidissement d'un gaz par compressions isothermes suivies de détente adiabatiques.

Pour un gaz parfait<sup>(99)</sup> dans le diagramme de Clapeyron l'évolution de la température se fait suivant le schéma :

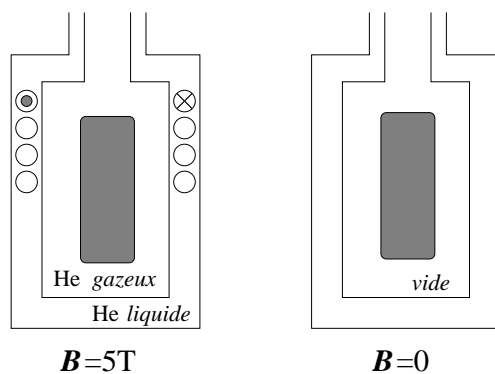


**Figure 5.11** Diagramme de Clapeyron pour le refroidissement d'un gaz.

Dans le cas d'un système magnétique (solide, liquide ou vapeur), on procède à des transformations équivalentes. On suppose que l'on dispose d'une substance paramagnétique à laquelle on applique une succession de transformations analogues aux isothermes-adiabatiques du gaz pour diminuer l'entropie du système. On applique  $\mathbf{B}$  de manière isotherme jusqu'à  $T_0 = 4,2 \text{ K}$  (hélium liquide), puis on supprime  $\mathbf{B}$  de manière isentropique (quasi-statique réversible). Pendant les phases isothermes, le système perd de la chaleur. L'hélium gazeux, bon conducteur de la chaleur, emplit alors l'enceinte en contact avec la substance. Pendant les phases adiabatiques, on remplace le gaz par le vide pour empêcher cette fois les transferts de chaleur.

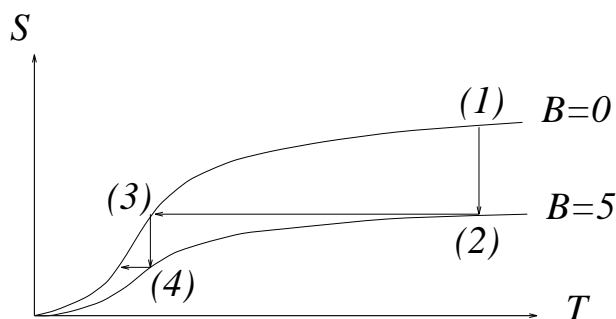
<sup>(99)</sup> Le modèle du gaz parfait est ici utilisé à titre d'exemple. Il est bien entendu impossible d'obtenir la liquéfaction d'un gaz parfait dans lequel, par essence, les interactions entre molécules sont négligées. Il s'agit donc ici du refroidissement d'un gaz qui reste en phase vapeur.





**Figure 5.12** Refroidissement d'une substance paramagnétique par désaimantation adiabatique.

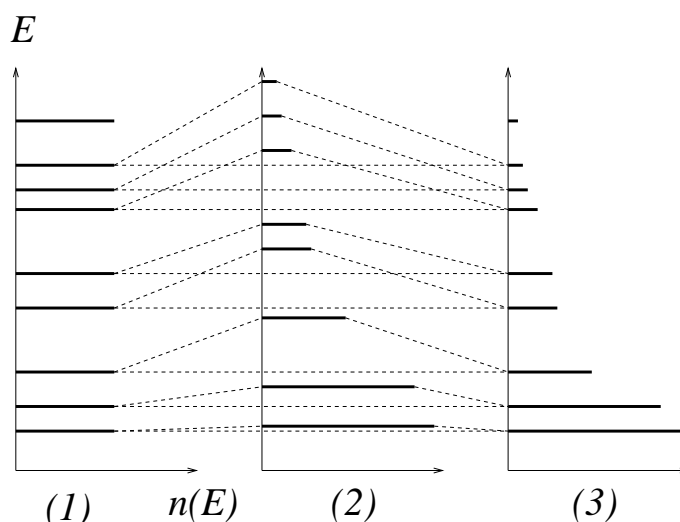
On peut ainsi descendre jusqu'à  $\sim 2$  mK suivant le schéma ci-dessous dans le diagramme  $(S, T)$ .



**Figure 5.13** Evolution de l'entropie et de la température au cours du processus de refroidissement par désaimantation adiabatique.

**Remarque :**

Interprétation quantique : un échange de travail déplace les niveaux d'énergie du système (en particulier, l'effet Zeeman lève les dégénérescences), ce qui modifie les écarts en énergie, alors qu'un échange de chaleur avec l'extérieur modifie la population de ces mêmes niveaux conformément aux poids de Boltzmann.



**Figure 5.14** Evolution des niveaux d'énergie des atomes au cours du processus de refroidissement par désaimantation adiabatique.

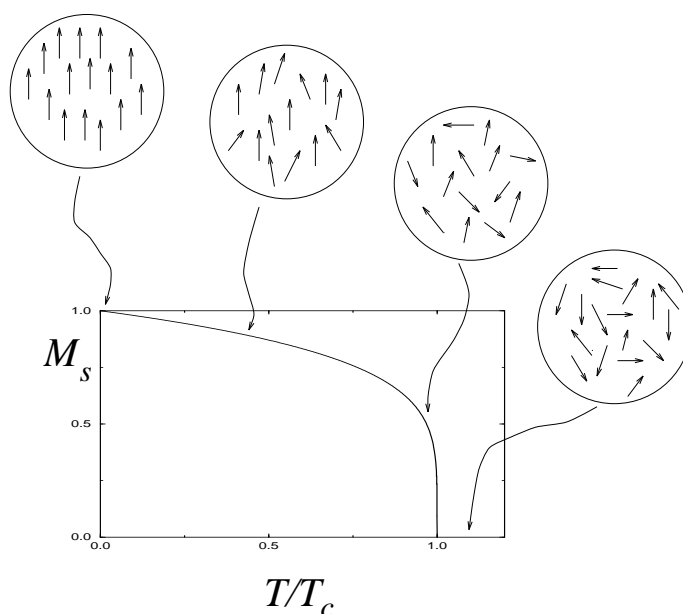
Entre les situations (1) et (3), seules les populations des niveaux ont été modifiées, leurs positions sont inchangées. On peut noter que dans la situation (1), la température est très élevée, puisque l'occupation de tous les niveaux est identique.

Par désaimantation d'aimantation nucléaire, on peut atteindre des températures encore plus basses :  $10^{-9}$  K.

## 2.6. Ferromagnétisme

### 2.6.1. Description expérimentale

Il s'agit cette fois de matériaux qui, au-dessous d'une température critique (dite de Curie), possèdent une aimantation spontanée en champ nul résultant de la mise en ordre progressive des dipôles magnétiques individuels<sup>(100)</sup>.



**Figure 5.15** Evolution schématique de l'orientation des moments magnétiques avec la température pour un ferromagnétique sans champ appliqué.

C'est un phénomène spontané, c'est-à-dire qu'il se produit sans qu'il soit nécessaire d'appliquer un champ extérieur, et qui résulte de la compétition entre l'énergie (ordre) et l'entropie (agitation thermique). Pour minimiser l'énergie libre  $F = U - TS$ , le système a avantage à minimiser son énergie interne à basse température, ce qui favorise une orientation commune des moments magnétiques, alors qu'à haute température il est avantageux de maximiser l'entropie, ce qui conduit à une structure désordonnée. Entre ces deux régimes apparaît une transition à une température bien définie.

L'application d'un champ est sans effet à température nulle, mais favorise l'ordre à température non nulle :

<sup>(100)</sup> Contrairement aux paragraphes précédents où l'on a essentiellement traité du diamagnétisme et du paramagnétisme des ions libres, il s'agit maintenant d'une assemblée d'atomes ou d'ions formant un solide.

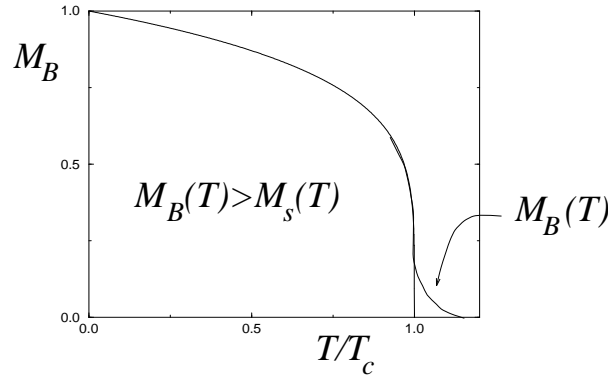


Figure 5.16 Aimantation d'un ferromagnétique sous champ.

La variation d'aimantation avec le champ est plus complexe que pour un matériau paramagnétique : dans la phase ferromagnétique, l'aimantation n'est plus proportionnelle au champ, même en champ faible. La notation

$$M = \frac{\chi(B)}{\mu_0} B$$

peut toutefois être utilisée, mais  $\chi(B)$  n'est plus un scalaire indépendant de  $B$ . Cela traduit le comportement fortement non linéaire des matériaux ferromagnétiques.

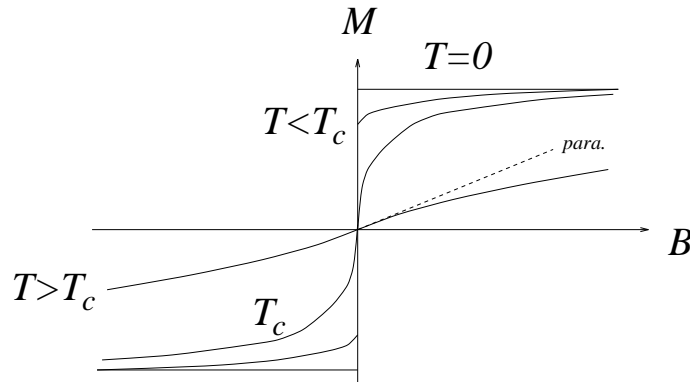


Figure 5.17 Courbes isothermes pour un ferromagnétique.

### 2.6.2. Théorème de van Leeuwen

Le théorème de van Leeuwen exprime l'impossibilité du magnétisme en physique classique. On considère un système classique constitué de  $N$  électrons par unité de volume (charge  $q_e = -q$ ) sur des orbites circulaires. Chaque orbite, assimilée à une boucle de courant, porte un moment magnétique  $\mu = \frac{1}{2} q v r$  perpendiculaire à la boucle de courant. On applique un champ magnétique  $\mathbf{B}$  dans la direction  $\mathbf{u}_z$ . L'énergie  $U(\theta)$  d'un moment  $\mu$  pointant dans la direction  $\theta$  par rapport à  $\mathbf{u}_z$  vaut  $-\mu B \cos \theta$ . On affecte chaque orientation d'un poids statistique donné par le facteur de Boltzmann  $e^{-U(\theta)/k_B T}$ , de sorte que le moment magnétique moyen dans la direction du champ s'écrit

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\int_0^\pi \sin \theta d\theta \mu \cos \theta e^{-U(\theta)/k_B T}}{\int_0^\pi \sin \theta d\theta e^{-U(\theta)/k_B T}}.$$

Il en résulte une expression de la susceptibilité paramagnétique classique  $\chi_P$  pour cette assemblée de  $N$  moments, analogue à la susceptibilité d'orientation des milieux diélectriques, et donnée par

$$\chi_P = \frac{1}{3} \frac{N\mu_0\mu^2}{k_B T}.$$

En remplaçant  $\mu$  par  $\frac{1}{2}qvr$ , on fait apparaître un terme en  $v^2$  proportionnel à l'énergie cinétique, elle-même de l'ordre de  $k_B T$  en vertu du principe d'équipartition de l'énergie. Il vient alors

$$\chi_P \simeq \frac{1}{6} \mu_0 \frac{Nq^2 r^2}{m_e},$$

c'est-à-dire exactement l'opposé de la contribution diamagnétique. A l'échelle macroscopique, paramagnétisme et diamagnétisme devraient se compenser exactement. On constate bien sûr expérimentalement que ce n'est pas le cas. Ce résultat implique que les phénomènes liés au magnétisme sont nécessairement d'origine quantique.

### 2.6.3. Origine de l'énergie d'échange ferromagnétique

Si l'on suppose que le phénomène de ferromagnétisme résulte de l'interaction dipolaire entre moments magnétiques, on s'attend à une température de transition de l'ordre de

$$k_B T_c \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_B^2}{r^3}.$$

Avec  $r \simeq 1\text{Å}$ , il vient  $T_c \simeq 0.6\text{ K}$ . Cette valeur est considérablement plus faible que les températures critiques que l'on peut observer dans la nature et qui peuvent dépasser très largement la température ambiante. Le mécanisme qui couple les moments magnétiques entre eux, l'énergie d'échange, ne peut donc pas provenir d'une interaction dipôle-dipôle classique. Il s'agit d'une interaction électrostatique entre fermions.

#### Remarque :

i) Expression de l'énergie d'échange ferromagnétique.

On considère deux atomes  $A$  et  $B$  et deux électrons situés en  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . Les fonctions d'onde monoatomiques sont notées  $\varphi_A$  et  $\varphi_B$ , on peut donc avoir  $\varphi_A(\mathbf{r}_1)$  et  $\varphi_B(\mathbf{r}_2)$  ou le contraire  $\varphi_A(\mathbf{r}_2)$  et  $\varphi_B(\mathbf{r}_1)$ , car les électrons sont indiscernables. Il existe en outre les degrés de liberté de spin et on note  $|\chi\rangle$  la partie de spin.

Notons  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  la partie orbitale de la fonction d'onde. On peut donc effectuer deux combinaisons linéaires :

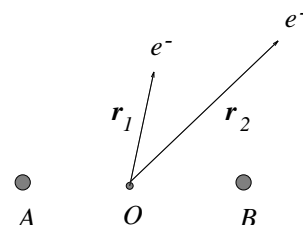
$$\psi_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_A(\mathbf{r}_1)\varphi_B(\mathbf{r}_2) + \varphi_A(\mathbf{r}_2)\varphi_B(\mathbf{r}_1))$$

$$\psi_{AS}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_A(\mathbf{r}_1)\varphi_B(\mathbf{r}_2) - \varphi_A(\mathbf{r}_2)\varphi_B(\mathbf{r}_1))$$

qui sont respectivement symétrique et antisymétrique pour les coordonnées d'espace, i.e. pour l'échange  $\mathbf{r}_1 \longleftrightarrow \mathbf{r}_2$ . Le calcul de l'énergie de répulsion électronique  $e^- - e^-$  fait intervenir deux intégrales sur les parties spatiales des fonctions d'onde,

$$K = \int d^3r_1 d^3r_2 |\varphi_A(\mathbf{r}_1)|^2 \frac{e^2}{r_{12}} |\varphi_B(\mathbf{r}_2)|^2 \quad \text{intégrale de COULOMB}$$

$$J = \int d^3r_1 d^3r_2 \varphi_A^*(\mathbf{r}_1)\varphi_B^*(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{r_{12}} \varphi_A(\mathbf{r}_2)\varphi_B(\mathbf{r}_1) \quad \text{intégrale d'ÉCHANGE}$$



qui conduisent aux expressions du terme coulombien dans les états symétrique et antisymétrique :

$$\begin{aligned}\langle \psi_S | e^2/r_{12} | \psi_S \rangle &= \mathcal{U}_S = K + J \\ \langle \psi_{AS} | e^2/r_{12} | \psi_{AS} \rangle &= \mathcal{U}_{AS} = K - J.\end{aligned}\tag{5.16}$$

L'énergie électrostatique n'est donc pas la même selon que la partie spatiale de la fonction d'onde est symétrique ou antisymétrique. Il faut en plus tenir compte de la partie de spin qui peut elle aussi être symétrique,  $|\chi_{\uparrow\uparrow}\rangle$ , ou antisymétrique,  $|\chi_{\uparrow\downarrow}\rangle$ , par échange des deux électrons. Les électrons étant des fermions, la fonction d'onde totale est antisymétrique par échange des deux particules. C'est une traduction mathématique du principe de Pauli. On a donc

$$\begin{aligned}|\Psi_1\rangle &= |\psi_S, \chi_{\uparrow\downarrow}\rangle & \langle \Psi_1 | e^2/r_{12} | \Psi_1 \rangle &= K + J \\ |\Psi_2\rangle &= |\psi_{AS}, \chi_{\uparrow\uparrow}\rangle & \langle \Psi_2 | e^2/r_{12} | \Psi_2 \rangle &= K - J.\end{aligned}$$

On peut remplacer ces intégrales par un opérateur agissant dans l'espace de spin, c'est l'hamiltonien d'Heisenberg <sup>(101)</sup>. On peut alors introduire deux constantes  $a$  et  $b$  pour retrouver, par un hamiltonien de spin effectif, les répulsions électroniques <sup>(102)</sup> :

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{Heis.}} = a\hat{\mathbb{1}} - \frac{2J}{\hbar^2}\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2.\tag{5.17}$$

La quantité  $-\frac{2J}{\hbar^2}\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$  est l'énergie d'échange, le signe  $-$  assure un alignement parallèle des spins lorsque  $J > 0$ .

Ce résultat est un phénomène purement quantique qui résulte du fait que, pour  $J > 0$ ,

$$\mathcal{U}_{es}(\uparrow\uparrow) < \mathcal{U}_{es}(\uparrow\downarrow).$$

On le comprend par le trou d'échange pour deux fermions sans interaction (par exemple deux neutrons). Si les deux fermions sont dans le même état de spin, le principe de Pauli leur interdit d'occuper un état spatial identique. Ils sont donc éloignés, ce qui diminue d'autant la répulsion électrostatique quand les fermions sont chargés et favorise l'état de spin parallèle par rapport à l'état antiparallèle. On schématise cet effet par l'allure de la courbe donnant la probabilité d'observer un fermion de spin donné à la distance  $r$  d'un

<sup>(101)</sup>En mécanique quantique, on montre que si  $\mathbf{S}_1$  et  $\mathbf{S}_2$  sont deux spins 1/2, les éléments de matrice de  $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$  dépendent de la symétrie de la fonction d'onde de spin :

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\uparrow\uparrow} | \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 | \chi_{\uparrow\uparrow} \rangle &= \frac{1}{4}\hbar^2 \\ \langle \chi_{\uparrow\downarrow} | \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 | \chi_{\uparrow\downarrow} \rangle &= -\frac{3}{4}\hbar^2.\end{aligned}$$

<sup>(102)</sup>Avec  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{Heis.}} = a\hat{\mathbb{1}} + b\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ , on a

$$\begin{aligned}\langle \chi_{\uparrow\uparrow} | \hat{\mathcal{H}}_{\text{Heis.}} | \chi_{\uparrow\uparrow} \rangle &= a + \frac{1}{4}b\hbar^2 = K - J \\ \langle \chi_{\uparrow\downarrow} | \hat{\mathcal{H}}_{\text{Heis.}} | \chi_{\uparrow\downarrow} \rangle &= a - \frac{3}{4}b\hbar^2 = K + J.\end{aligned}$$

Il suffit donc de poser  $a = K - \frac{1}{2}J$  et  $b = -\frac{2J}{\hbar^2}$ .

**Figure 5.19** Structure en domaines séparés par des parois de Bloch pour minimiser l'énergie d'un ferromagnétique.

Au niveau des parois de Bloch, il y a retournement progressif des spins. On cherche ici à déterminer le profil de l'orientation des moments magnétiques au niveau d'une paroi de Bloch à  $180^\circ$ . Pour cela, on minimise l'énergie de la paroi. On considère donc un matériau ferromagnétique ( $T < T_c$ ) inhomogène, ce qui implique de tenir compte de l'énergie d'anisotropie (qui dépend de l'orientation des moments). On se limite à un problème unidimensionnel en supposant qu'il y a invariance par translation parallèlement à la paroi (axes  $Oy$  et  $Oz$ ) et on traite les  $\mu_i$  comme des vecteurs du plan  $yOz$  :

---

<sup>(103)</sup> Cette interaction spin-orbite, décrite par un terme  $\mathbf{LS}$  caractérise l'interaction du moment magnétique de spin de l'électron (proportionnel à  $\mathbf{S}$ ) avec le champ magnétique créé, dans le référentiel propre de l'électron, par le noyau en mouvement (proportionnel à  $\mathbf{L}$ ).

**Figure 5.20** Schéma du retournement des spins au niveau d'une paroi de Bloch.

En limitant l'interaction d'échange aux premiers voisins dans la direction  $x$ , l'énergie s'écrit, pour une rangée de moments magnétiques et par unité de surface  $a^2$  dans le plan  $yOz$  :

$$\mathcal{U} = \frac{1}{a^2} \left[ -J \sum_i \mu_i \mu_{i+1} - K \sum_i (\mathbf{n} \cdot \mu_i)^2 \right].$$

En notant  $\mu$  le module des moments magnétiques et en introduisant les angles  $\theta$ , on obtient

$$\mathcal{U}\{\theta_i\} = -\frac{J\mu^2}{a^2} \sum_i \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) - \frac{K\mu^2}{a^2} \sum_i \cos^2 \theta_i.$$

Dans la limite continue, si l'énergie d'anisotropie est faible devant l'énergie d'échange, la variation des  $\theta_i$  est lente, ce qui permet de développer

$$\frac{1}{a^2} \cos(\theta_{i+1} - \theta_i) \sim \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)^2}{2}.$$

Or

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{a} \simeq \frac{d\theta}{dx}$$

soit, en remplaçant  $\sum_i$  par  $\int \frac{dx}{a}$  et en omettant la constante :

$$\mathcal{U}\{\theta(x)\} = \int \frac{dx}{a} \left[ \frac{1}{2} J\mu^2 \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 - \frac{K\mu^2}{a^2} \cos^2 \theta(x) \right]. \quad (5.18)$$

Posons  $A = \frac{J\mu^2}{a} > 0$  et  $B = \frac{K\mu^2}{a^3} > 0$ . On doit minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{U}\{\theta(x)\} = \int dx \left[ \frac{1}{2} A \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 - B \cos^2 \theta(x) \right]$$

analogue à l'action d'une particule de masses  $m \rightarrow A$  se déplaçant au cours du temps  $\rightarrow x$  le long d'une coordonnée spatiale  $\rightarrow \theta$  dans un potentiel  $\mathcal{V} = B \cos^2 \theta$ . On en déduit que l'énergie totale de la particule est conservée,

$$T + \mathcal{V} = \text{const.} = \frac{1}{2} A \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 + B \cos^2 \theta(x)$$

**Figure 5.21** Profil de retournement des spins au niveau d'une paroi de Bloch.

Connaissant l'expression de  $\theta(x)$ , on pourrait ensuite calculer l'énergie de la paroi.

iv) Cycle d'hystérésis : dans un échantillon réel, l'existence des domaines conduit à une courbe  $M$  en fonction de  $B$  présentant un cycle d'hystérésis dû au déplacement des parois de Bloch.



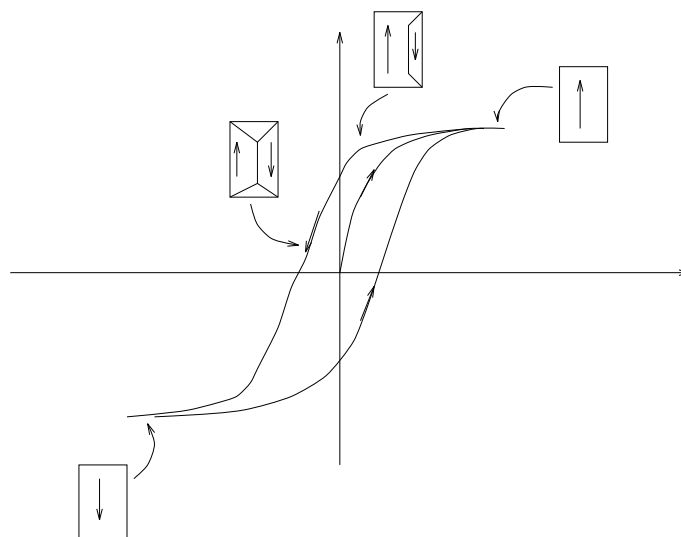


Figure 5.22 Cycle d'hysteresis et déplacement des parois de Bloch.

Manifestement, l'hypothèse d'une aimantation uniforme cesse d'être valable. Nous supposons cependant que c'est le cas dans la plupart des calculs.

#### 2.6.4. Antiferromagnétisme

Dans un matériau ferromagnétique, sous l'effet de l'interaction d'échange, les moments magnétiques sont orientés dans le même sens à basse température. Il existe également d'autres structures rencontrées dans la nature. Par exemple, si l'interaction d'échange est négative et à courte portée, elle favorise une orientation antiparallèle des moments proches voisins. L'état fondamental du système est alors réalisé par une structure alternée de moments *up* et *down*. Les deux sous-réseaux se compensent exactement et l'aimantation résultante est nulle. Cette mise en ordre n'est possible qu'à basse température, au-dessous d'une température de transition antiferromagnétique appelée température de Néel. Au-dessus de  $T_N$ , l'agitation thermique l'emporte et la phase stable est la phase paramagnétique.

#### 2.6.5. Théorie de Weiss de la transition ferromagnétique

Les systèmes ferromagnétiques sont très abondants dans la nature et leurs propriétés physiques sont très variées. On peut néanmoins construire une théorie élémentaire qui rende convenablement compte de l'essentiel de leurs propriétés.

Expérimentalement les courbes d'aimantation spontanée en fonction de la température ont l'allure suivante :

Tableau 5.3 Quelques températures critiques de matériaux ferromagnétiques.

métal/alliage	Co	Fe	YFeO <sub>3</sub>	Ni	CrO <sub>2</sub>	Gd	CrBr <sub>3</sub>	EuS
$T_c$ (K)	1388	1042	643	631	386	292	32	16.5

La théorie de Weiss est une théorie phénoménologique (champ moyen). On applique un champ  $\mathbf{B}$  à un matériau. On pose  $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$  ( $H$  et  $M$  ont même dimension) et l'on représente l'effet sur un site particulier des moments magnétiques voisins par un "champ moléculaire" qui favorise une orientation commune <sup>(104)</sup> :

$$H_{\text{eff}} = H + \lambda M$$

<sup>(104)</sup>Si  $\lambda < 0$  on peut décrire l'antiferromagnétisme qui conduirait par exemple à une température critique négative. Il faut alors traiter séparément chacun des deux sous-réseaux.

où  $\lambda \sim 900$  pour Ni par exemple. Ce terme représente une correction due à l'échange, mais pas un effet de champ magnétique appliqué.

Considérons le cas d'une assemblée de spins  $\frac{1}{2}$ . Les moments prennent deux valeurs :  $\pm\mu_B$  (anisotropie axiale extrême), et le moment moyen par atome s'écrit

$$\langle\mu\rangle = \mu_B \frac{e^{+\mu_B\mu_0 H_{\text{eff}}/k_B T} - e^{-\mu_B\mu_0 H_{\text{eff}}/k_B T}}{Z},$$

$$Z = e^{+\mu_B\mu_0 H_{\text{eff}}/k_B T} + e^{-\mu_B\mu_0 H_{\text{eff}}/k_B T},$$

$$\langle\mu\rangle = \mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B\mu_0 H_{\text{eff}}}{k_B T}\right).$$

Par unité de volume on obtient une aimantation  $M = N\langle\mu\rangle$ , soit

$$M = \underbrace{M_{\text{sat}}}_{N\mu_B} \tanh\left(\frac{\mu_B\mu_0 H_{\text{eff}}}{k_B T}\right).$$

On pose  $\frac{M}{M_{\text{sat}}} = m$  et

$$x = \frac{\mu_B\mu_0 H_{\text{eff}}}{k_B T} = \frac{\mu_B\mu_0 H}{k_B T} + \frac{\mu_B\lambda}{k_B T} M_{\text{sat}} \frac{M}{M_{\text{sat}}},$$

soit

$$m = \tanh x$$

$$x = \frac{\mu_B\mu_0 H}{k_B T} + \frac{\mu_B\lambda M_{\text{sat}}}{k_B T} m \quad (5.20)$$

ou encore

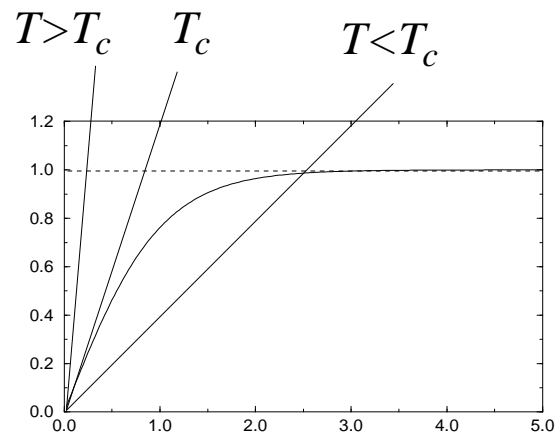
$$m = \frac{k_B T}{\mu_0\mu_B\lambda M_{\text{sat}}} x - \frac{\mu_0 H}{\lambda M_{\text{sat}}} = \tanh x. \quad (5.21)$$

Ces équations auto-cohérentes peuvent être résolues graphiquement. Il s'agit de chercher l'intersection entre une droite et une  $\tanh$  : en champ appliqué nul,  $H = 0$ , les droites correspondant à différentes températures passent par l'origine et la température critique correspond au cas où les deux courbes sont tangentes à l'origine, puisqu'elle sépare un régime basse température d'aimantation non nulle et un régime haute température où la seule intersection est en  $M = 0$ . La valeur de  $T_c$  dépend fortement de la valeur de  $\lambda$ , mais cette fois l'ordre de grandeur est compatible avec les résultats expérimentaux, ce qui n'était pas le cas pour une interaction d'origine dipolaire.

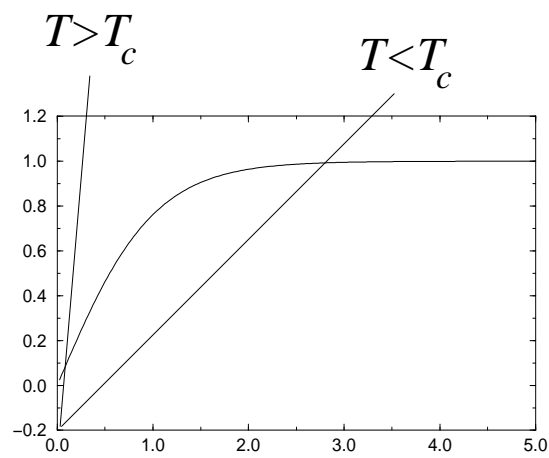
$$T_c = \frac{\mu_0\mu_B\lambda M_{\text{sat}}}{k_B} = \frac{N\mu_0\mu_B^2\lambda}{k_B} \sim 100 \text{ K.}$$

$$m = \frac{T}{T_c} x - \frac{\mu_0 H}{\lambda M_{\text{sat}}}, \quad x = \frac{\mu_B\mu_0 H}{k_B T} + \frac{T_c}{T} m.$$

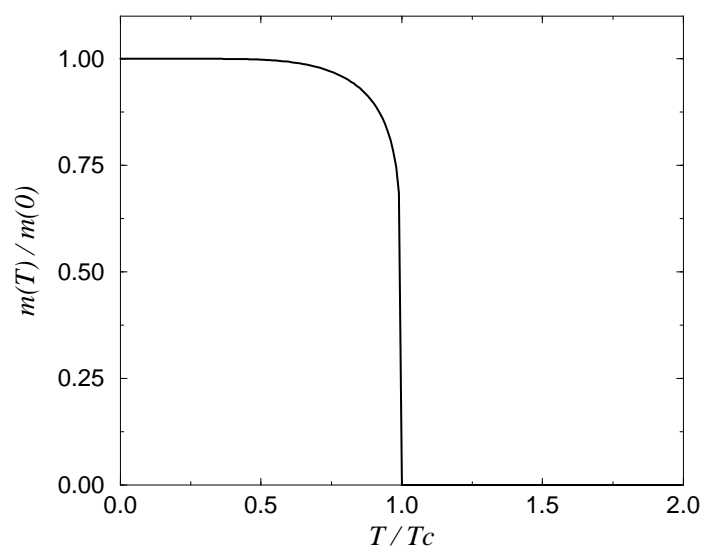
Sous champ, il existe toujours une intersection à aimantation non nulle :



**Figure 5.23** Solution graphique des équations de Weiss sans champ.



**Figure 5.24** Solution graphique des équations de Weiss sous champ.

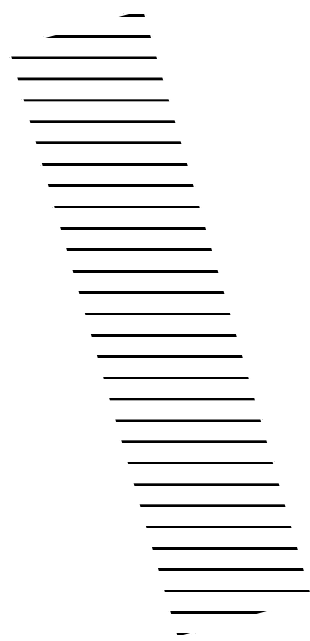
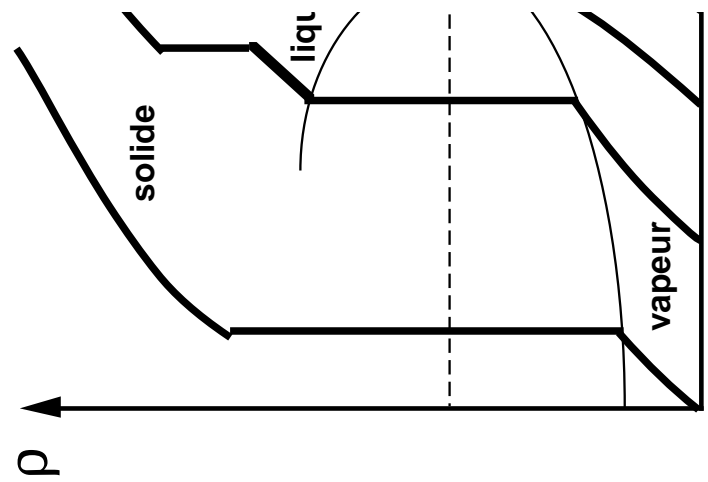


**Figure 5.25** Allure de l'aimantation spontanée en fonction de la température pour le modèle d'Ising bidimensionnel.

**Remarque :**

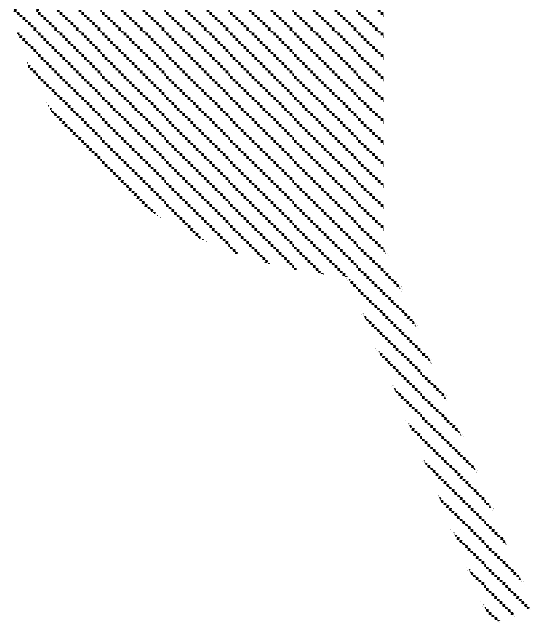
Fluctuations et phénomènes critiques.

L'ensemble des propriétés thermodynamiques d'un système pouvant exister sous les trois phases solide-liquide-vapeur est résumé par la surface caractéristique <sup>(105)</sup> :



- métastabilité et hystérésis

Dans le cas d'un système magnétique, la surface caractéristique inclut des variables thermodynamiques supplémentaires (champ magnétique et aimantation). On s'intéresse généralement aux solides de sorte que les effets de pression et les variations de volume peuvent être négligées <sup>(106)</sup>. Avec cette simplification, la surface caractéristique est toujours représentée dans un espace à trois paramètres, elle présente l'allure suivante :



puissance en fonction de l'écart à la température critique ou de l'écart au champ critique. La nomenclature utilisée est la suivante :

$$\begin{aligned}
 H = 0, \quad T < T_c, \quad m(T) &\sim (T_c - T)^\beta \\
 H = 0, \quad T \text{ qcq}, \quad \chi(T) &\sim |T - T_c|^{-\gamma} \\
 T = T_c, \quad m &\sim H^{1/\delta}.
 \end{aligned}$$

On définit aussi d'autres exposants critiques pour la fonction de corrélation ( $\eta$ ), la chaleur spécifique ( $\alpha$ ), la longueur de corrélation ( $\nu$ ).

Les phénomènes critiques (singularités) sont dus à l'absence d'échelle de longueur au point critique. A toute température, les fluctuations sont mesurées par la longueur de corrélation ( $\xi$ ) et celle-ci diverge au point critique, d'où les phénomènes tels que l'opalescence critique dans un fluide (tubes de Natterer). Les transitions liquide-vapeur au point critique et ferromagnétique-paramagnétique sont analogues par certaines de leurs propriétés : la différence entre les densités de la phase liquide et de la phase gazeuse s'annule à  $T_c$  comme l'aimantation, et la compressibilité diverge comme la susceptibilité magnétique. La taille typique des amas corrélés est mesurée par  $\xi$ . Ces amas corrélés sont imbriqués les uns dans les autres à toutes les échelles de longueur comprises entre la taille caractéristique des molécules ou le pas du réseau cristallin et la longueur de corrélation. On obtient une structure fractale. Cette structure auto-similaire des amas corrélés entraîne des singularités en lois de puissance non entières (exposants critiques). Les valeurs des exposants critiques sont universelles, elles dépendent peu des détails sous-jacents à la physique du système, mais dépendent de la dimension d'espace  $d$  par exemple. Certaines valeurs expérimentales sont indiquées dans le tableau suivant. Elles mettent en évidence le caractère universel des exposants critiques. On remarque toutefois que les résultats expérimentaux diffèrent des valeurs obtenues dans le cadre de la théorie de Weiss qui n'est qu'approximative.

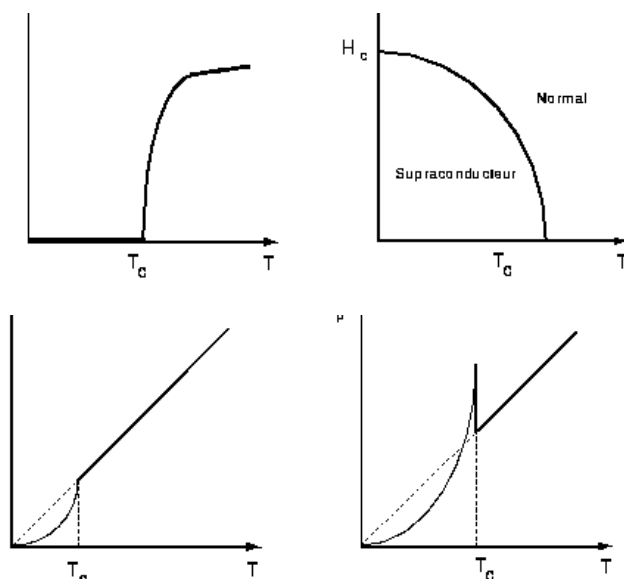
**Tableau 5.4** Exemples d'exposants critiques mesurés expérimentalement.

systèmes fluides			
gaz	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$^3\text{He}$	0.358		4.26
$^4\text{He}$	0.356		4.34
Xe	0.35	1.20	4.5
O <sub>2</sub>	0.353		4.37
CO <sub>2</sub>	0.349	1.20	4.44
H <sub>2</sub> O	0.350		4.50
systèmes magnétiques			
alliages	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
Fe	0.34	1.33	
Ni	0.390	1.315	4.22
Gd	0.399	1.3	4.0
EuO	0.368	1.31	4.46
CrBr <sub>3</sub>	0.368	1.22	4.3

## 2.7. Matériaux supraconducteurs

### 2.7.1. Description expérimentale

Le phénomène de supraconductivité a été mis en évidence expérimentalement dans le cas du mercure en 1911 par Kamerling Onnes. Il se caractérise par une résistivité qui s'annule à une température critique  $T_c$ . La phase supraconductrice peut par ailleurs être détruite par un champ magnétique excédant une valeur critique  $H_c$  dépendant de la température. C'est une transition du second ordre, l'énergie interne et l'entropie sont continues mais pas leurs dérivées.

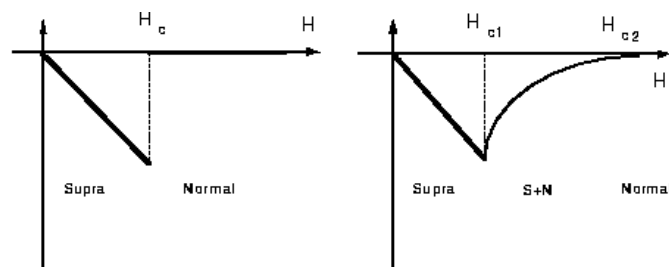


**Figure 5.26** Allures i) de la résistivité en fonction de la température, ii) du diagramme de phase, iii) de l'énergie interne et iv) de l'entropie d'un supraconducteur en fonction de la température.

A l'intérieur d'un supraconducteur, le champ magnétique s'annule. Cette propriété est connue sous le nom d'effet Meissner (Meissner et Ochsenfeld 1933). On dit aussi que les supraconducteurs sont des matériaux diamagnétiques parfaits. On distingue

- les supraconducteurs de première espèce, pour lesquels le diamagnétisme est parfait jusqu'à une valeur critique  $H_c$  du champ magnétique ( $H_c$  dépend de la température comme le montre le diagramme de phase) qui détruit la supraconductivité,

- des supraconducteurs de seconde espèce pour lesquels un diamagnétisme imparfait se prolonge au-delà de  $H_{c1}$  jusqu'à une valeur  $H_{c2}$ . Entre les deux valeurs  $H_{c1}$  et  $H_{c2}$ , le matériau est constitué d'un mélange de phases supraconductrice et normale.



**Figure 5.27** Supraconducteurs de type I et II.

### 2.7.2. Effet Meissner, équation de London

Afin de rendre compte de l'effet Meissner, responsable par exemple du phénomène de lévitation magnétique représenté symboliquement ci-dessous, on établit l'équation de London.

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} = \mathbf{0}. \quad (5.22)$$

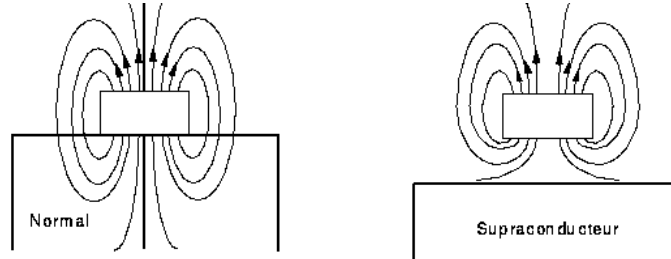


Figure 5.28 Lévitation magnétique au-dessus d'un supraconducteur.

L'équation de London, associée aux équations de Maxwell  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  et  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s$ , impose au champ magnétique  $\mathbf{B}$  d'être tangent à la surface de l'échantillon. Supposons en effet que  $\mathbf{B}$  soit normal à la surface  $yOz$  d'un échantillon semi-infini :  $\mathbf{B} = B(x) \mathbf{u}_x$ . Alors  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  impose  $B(x) = \text{cte}$ , ce qui conduit à  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{0}$  et donc à  $\mathbf{j}_s$  et  $\mathbf{B}$  tous deux nuls.  $\mathbf{B}$  est donc de la forme  $\mathbf{B} = B(x) \mathbf{u}$  où  $\mathbf{u}$  est un vecteur unitaire du plan  $yOz$  et l'équation de London s'écrit à une dimension

$$\frac{d^2 B}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_L^2} B(x) = 0$$

et admet pour solution :

$$B(x) = B_0 e^{-x/\lambda_L}.$$

Le profil du champ magnétique est représenté ci-dessous.

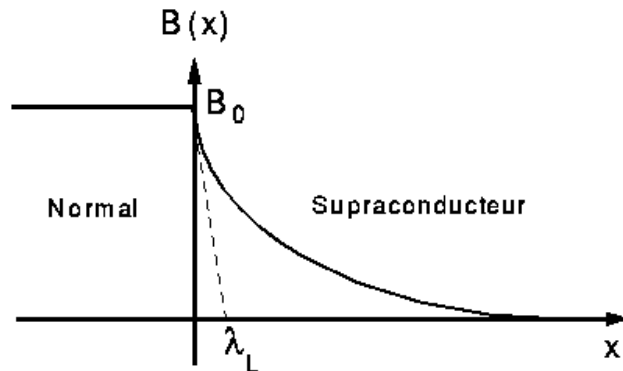


Figure 5.29 Extinction du champ magnétique dans un supraconducteur.

On constate que l'équation de London rend bien compte de l'expulsion du champ magnétique par le supraconducteur.



**Remarque :**

Etablissement de l'équation de London et London par une méthode variationnelle : on considère pour cela que dans la phase supraconductrice, les porteurs de charge de masse  $m$ , de charge  $q$ , de densité  $n_s$ , sont animés d'une vitesse  $v_s$ , de sorte que leur énergie cinétique s'écrit

$$E_{\text{cin}} = \int d\mathbf{r} \frac{1}{2} m v_s^2 n_s$$

où l'intégrale est étendue à tout le volume de l'échantillon supraconducteur. La densité de courant supraconducteur est donnée par

$$\mathbf{j}_s = n_s q \mathbf{v}_s$$

et, en régime statique, elle est reliée au champ magnétique  $\mathbf{B}$  par l'équation de Maxwell-Ampère

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s.$$

En combinant ces trois équations, on peut écrire l'énergie cinétique sous la forme

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2\mu_0} \lambda_L^2 \int d\mathbf{r} (\text{rot } \mathbf{B})^2$$

où  $\lambda_L$  est une quantité homogène à une longueur, appelée longueur de London et définie par

$$\lambda_L = \left( \frac{m}{\mu_0 n_s q^2} \right)^{1/2}.$$

D'autre part, au champ magnétique  $\mathbf{B}$  est associée une énergie magnétique

$$E_{\text{mag}} = \int d\mathbf{r} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}.$$

L'énergie totale (dans un métal normal il faudrait ajouter une interaction  $e^-$ -réseau) s'écrit donc

$$E_{\text{tot}}\{\mathbf{B}(\mathbf{r})\} = \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} [\mathbf{B}^2 + \lambda_L^2 (\text{rot } \mathbf{B})^2]. \quad (5.23)$$

L'énergie totale est minimale pour le profil réel  $\mathbf{B}^*(\mathbf{r})$  du champ magnétique. La variation  $\delta E_{\text{tot}}$  au premier ordre est donc nulle si le profil  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  s'écarte du profil réel d'une quantité infinitésimale  $\delta \mathbf{B}(\mathbf{r})$  :

$$\delta E_{\text{tot}}\{\mathbf{B}(\mathbf{r})\} = \frac{1}{2\mu_0} \int d\mathbf{r} [2\mathbf{B}\delta\mathbf{B} + 2\lambda_L^2 \text{rot } \mathbf{B} \delta(\text{rot } \mathbf{B})].$$

En utilisant  $\delta \text{rot } \mathbf{B} = \text{rot } \delta \mathbf{B}$  et  $\text{rot } \mathbf{B} \text{ rot } \delta \mathbf{B} = \text{rot rot } \mathbf{B} \delta \mathbf{B}$  obtenu en intégrant par parties dans l'hypothèse où  $\delta \mathbf{B}$  s'annule aux limites du domaine d'intégration, on obtient :

$$\delta E_{\text{tot}}\{\mathbf{B}(\mathbf{r})\} = \frac{1}{\mu_0} \int d\mathbf{r} [\mathbf{B} + \lambda_L^2 \text{rot rot } \mathbf{B}] \delta \mathbf{B} = 0.$$

On en déduit l'équation de London (London et London 1935)

$$\mathbf{B} + \lambda_L^2 \text{rot rot } \mathbf{B} = 0$$

que l'on peut encore écrire, avec  $\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B}$ , sous la forme

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} = 0. \quad (5.24)$$

### 2.7.3. Les équations de Ginzburg–Landau

La théorie de Ginzburg-Landau de la supraconductivité est une théorie thermodynamique phénoménologique qui repose sur un développement de l'énergie libre. La densité d'énergie libre sous champ prend la forme suivante (Ginzburg et Landau 1950) :

$$f_{s.b.} = f_{n.o.} + \alpha |\psi|^2 + \beta |\psi|^4 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2m_*} | -i\hbar\nabla\psi - q_*\mathbf{A}\psi |^2. \quad (5.25)$$

On en déduit les équations de Ginzburg–Landau en minimisant  $f_{s.b.}$  :

$$\delta \int f_{s.b.} dx = \delta F_{s.b.} = 0,$$

soit

$$\alpha\psi + 2\beta\psi |\psi|^2 - \frac{\hbar^2}{2m_*} \left[ \nabla - \frac{iq_*\mathbf{A}}{\hbar} \right]^2 \psi = 0, \quad (5.26)$$

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar q_*}{2m_*} [\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi] - \frac{q_*^2\mathbf{A}}{m_*} |\psi|^2. \quad (5.27)$$

#### Remarque :

i) Etablissement des équations de Ginzburg-Landau : on considère tout d'abord le cas d'un supraconducteur homogène en l'absence de champ magnétique. Le paramètre d'ordre pour la transition considérée peut être la densité de porteurs de charge supraconducteurs (paires de Cooper) (Cooper 1957). Il n'y a aucune paire de Cooper en phase normale ( $T > T_c$ ), elles apparaissent à  $T_c$  en nombre croissant lorsque la température diminue. Soit  $n_s = |\psi|^2$  où  $\psi(\mathbf{r})$  est une fonction d'onde effective des paires de Cooper. Au voisinage de la température critique, la densité volumique d'énergie libre  $f_{s.o.}$  (s : supraconducteur ; o : en champ magnétique nul) s'écrit sous forme d'un développement en puissances de  $n_s$  :

$$f_{s.o.} = f_{n.o.} + \alpha |\psi|^2 + \beta |\psi|^4$$

(n : phase normale).  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients dépendants éventuellement de la température.  $\alpha(T)$  s'annule à la température critique et peut être développé au premier ordre au voisinage de  $T_c$  :  $\alpha(T) = \tilde{\alpha}(T - T_c)$  où  $\tilde{\alpha} = \text{cte} > 0$  et la stabilité de la phase supraconductrice pour  $T < T_c$  impose que  $\beta$ , assimilé à une constante, soit positif.

Dans le cas d'un supraconducteur inhomogène, on prend en compte les variations spatiales du paramètre d'ordre par un terme proportionnel à  $|\nabla\psi|^2$ , ce qui suggère de l'écrire sous la forme de l'énergie cinétique des porteurs de charge

$$\frac{\hbar^2}{2m_*} |\nabla\psi|^2 = \frac{1}{2m_*} | -i\hbar\nabla\psi |^2.$$

En présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , on ajoute la densité d'énergie magnétique  $\frac{B^2}{2\mu_0}$ , et l'interaction du champ magnétique avec le courant induit par les variations spatiales de  $\psi(\mathbf{r})$  est prise en compte en réécrivant le terme en gradient sous une forme habituelle en mécanique quantique :

$$\frac{1}{2m_*} | -i\hbar\nabla\psi - q_*\mathbf{A}\psi |^2$$

$m_*$  et  $q_*$  sont la masse et la charge effectives des porteurs de charge.

La densité d'énergie libre sous champ prend ainsi la forme suivante (Ginzburg et Landau 1950) :

$$f_{s.b.} = f_{n.o.} + \alpha |\psi|^2 + \beta |\psi|^4 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2m_*} | -i\hbar \nabla \psi - q_* \mathbf{A} \psi |^2$$

d'où se déduisent les équations de Ginzburg-Landau par minimisation fonctionnelle.

ii) Profil du paramètre d'ordre à l'équilibre : considérons le problème unidimensionnel d'un supraconducteur semi-infini occupant le demi-espace  $x > 0$  en l'absence de champ magnétique. Supposons en outre que la fonction  $\psi(x)$  est réelle. Cette hypothèse est légitime, car la première équation de Ginzburg-Landau ne fait alors intervenir que des coefficients réels. Elle s'écrit

$$\alpha\psi + 2\beta\psi^3 - \frac{\hbar^2}{2m_*} \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0.$$

En multipliant l'équation précédente par  $2\frac{d\psi}{dx}$ , on obtient après intégration

$$\alpha\psi^2 + \beta\psi^4 - \frac{\hbar^2}{2m_*} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 = \text{cte.}$$

La constante est déterminée en écrivant que, lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , la fonction d'onde tend vers sa valeur de volume  $\psi_\infty^2 = -\frac{\alpha}{2\beta}$ . (Pour un matériau homogène de volume  $V$ , on a en effet  $F_{s.o.} = F_{n.o.} + \alpha\psi^2V + \beta\psi^4V$  qui présente un minimum lorsque  $\psi(\alpha + 2\beta\psi^2) = 0$  ; la solution  $\psi = 0$  correspond à  $T > T_c$  et, pour  $T < T_c$ , on a :  $\psi_\infty^2 = -\alpha/2\beta$ .) Dans ces conditions

$$-\frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\alpha^2}{4\beta} = \text{cte} = -\frac{\alpha^2}{4\beta}$$

de sorte que le profil  $\psi(x)$  est déterminé par l'équation

$$\alpha\psi^2 + \beta\psi^4 - \frac{\hbar^2}{2m_*} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 = -\frac{\alpha^2}{4\beta}$$

que l'on peut encore écrire

$$\beta(\psi_\infty^2 - \psi^2)^2 = \frac{\hbar^2}{2m_*} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2$$

ou

$$\frac{d\psi}{\psi_\infty^2 - \psi^2} = \left( \frac{2m_*\beta}{\hbar^2} \right)^{1/2} dx.$$

On obtient ainsi par intégration

$$\psi(x) = \psi_\infty \tanh \left( \frac{x}{\xi} \right) \quad (5.28)$$

où apparaît une quantité homogène à une longueur

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{m_* |\alpha|}} = \frac{\hbar}{\sqrt{m_* \tilde{\alpha} |T - T_c|}} \quad (5.29)$$

appelée longueur de cohérence et qui caractérise la distance nécessaire à l'établissement d'une fonction d'onde de paires d'électrons supraconducteurs depuis la surface libre du matériau.

iii) Effet Meissner et quantification du flux : en mécanique quantique, la densité de courant de probabilité  $\mathcal{J}$  en l'absence de champ magnétique est donnée par l'expression

$$\mathcal{J} = \frac{\hbar}{2m_* i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*).$$

En écrivant la fonction d'onde  $\psi$  sous la forme

$$\psi = |\psi| e^{i\theta}$$

$\mathcal{J}$  devient

$$\mathcal{J} = \frac{1}{m_*} \psi^* \hat{p} \psi, \quad \hat{p} = -i\hbar \nabla.$$

En présence d'un champ magnétique, on remplace l'impulsion canonique  $\hat{p}$  par  $\hat{p} - q_* \mathbf{A}$  et la densité de courant de probabilité vaut alors

$$\mathcal{J}_{\mathbf{A}} = \frac{1}{m_*} \psi^* (\hat{p} - q_* \mathbf{A}) \psi = \frac{|\psi|^2}{m_*} (\hbar \nabla \theta - q_* \mathbf{A})$$

ou encore

$$\mathcal{J}_{\mathbf{A}} = \frac{\hbar}{2m_* i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q_* \mathbf{A}}{m_*} \psi^* \psi.$$

La densité de courant électrique est ainsi donnée par  $\mathbf{j} = q_* \mathcal{J}_{\mathbf{A}}$ , c'est-à-dire par la seconde équation de Ginzburg–Landau, ce qui justifie a posteriori le choix du coefficient du terme en  $|\nabla \psi|^2$  dans la densité d'énergie libre.

L'équation de conservation de la charge électrique peut s'écrire

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

où la densité volumique de charge  $\rho(\mathbf{r}, t) = q_* n_s(\mathbf{r}, t)$ .

Afin de démontrer l'équation de London dans le cadre de la théorie de Ginzburg–Landau, on utilise la seconde équation de Ginzburg–Landau sous champ magnétique. Comme des coefficients complexes apparaissent dans cette équation, on choisit une fonction d'onde complexe  $\psi = \sqrt{n_s} e^{i\theta}$  où  $n_s$  est la densité de porteurs de charge. La densité de courant électrique est alors donnée par :

$$\mathbf{j} = \frac{n_s q_*}{m_*} (\hbar \nabla \theta - q_* \mathbf{A}).$$

En prenant le rotationnel de cette expression et en utilisant l'équation de Maxwell–Ampère  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  ainsi que l'identité  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \theta = \mathbf{0}$ , on obtient l'équation de London

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{n_s q_*^2}{m_*} \mathbf{B}$$

ou

$$\Delta \mathbf{B} - \frac{\mu_0 n_s q_*^2}{m_*} \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (5.30)$$

$$\lambda_L = \left( \frac{m_*}{\mu_0 n_s q_*^2} \right)^{1/2} = \left( \frac{m_*}{\mu_0 q_*^2} \frac{2\beta}{\tilde{\alpha} |T - T_c|} \right)^{1/2}. \quad (5.31)$$

Considérons un matériau cylindrique placé dans un champ magnétique suivant l'axe du cylindre à une température  $T > T_c$ . Le champ magnétique pénètre dans le volume du matériau. On diminue ensuite la température et, lorsque  $T < T_c$ , si le champ n'excède pas sa valeur critique, celui-ci est expulsé du volume du matériau en phase supraconductrice. Ce phénomène est dû à l'apparition des courants diamagnétiques à la surface du matériau.

Supposons maintenant que le matériau occupe le volume compris entre deux cylindres coaxiaux et réitérons la même expérience. A  $T > T_c$ , le champ magnétique règne dans tout l'espace. A  $T < T_c$ , les lignes de champ sont expulsées du matériau, certaines d'entre elles traversent l'espace vide à l'intérieur de l'échantillon. Supposons maintenant que l'on supprime la source de champ magnétique. Les lignes de champ passant dans l'échantillon se referment sur elles-mêmes, le matériau se comportant comme un solénoïde qui piège le champ magnétique.

Considérons maintenant la dernière situation. A l'intérieur du matériau, le long d'un circuit fermé  $\Gamma$ , la densité de courant est nulle tout comme le champ magnétique, à condition d'envisager un circuit  $\Gamma$  suffisamment éloigné des surfaces (quelques longueurs de London). On a alors :

$$\hbar \nabla \theta = q_* \mathbf{A}.$$

Le flux du champ magnétique à travers la cavité laissée vacante par l'échantillon s'exprime par :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \, d\mathbf{l} \\ &= \frac{\hbar}{q_*} \oint_{\Gamma} \nabla \theta \, d\mathbf{r} \\ &= \frac{\hbar}{q_*} \oint_{\Gamma} d\theta. \end{aligned}$$

Comme la fonction d'onde  $\psi$  doit être univoque, sa phase ne peut varier que d'un nombre entier de fois  $2\pi$  le long d'un circuit fermé. On en déduit que le flux est de la forme

$$\Phi = \frac{2\pi n \hbar}{|q_*|} = n \Phi_0$$

où  $\Phi_0 = \frac{2\pi \hbar}{|q_*|}$  est le quantum de flux. Le flux piégé par l'anneau supraconducteur est donc quantifié (Deaver et Fairbank 1961).

### 3. Approche macroscopique de l'électromagnétisme dans la matière et à l'extérieur de matériaux magnétiques

#### 3.1. Les courants ampériens $\mathbf{j}^*$ et $\mathbf{j}_S^*$

On considère un volume  $\Omega$  aimanté. L'aimantation par unité de volume au point source 1 est  $\mathbf{M}(1)$  de sorte que l'élément de volume  $d\tau$ , qui possède un moment magnétique élémentaire

$$d\mu = \mathbf{M}(1) d\tau$$

créé au point (2), à l'intérieur ou à l'extérieur du matériau, un potentiel vecteur

$$d\mathbf{A}(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} d\mu(1) \wedge \nabla_1 \left( \frac{1}{r_{12}} \right).$$

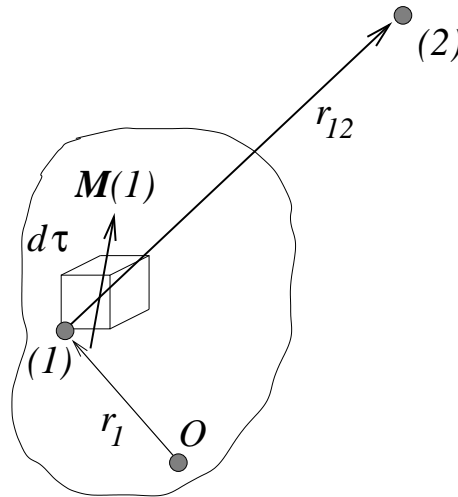


Figure 5.30 Potentiel vecteur créé par un élément aimanté.

Cette expression suppose valide la forme dipolaire, c'est-à-dire qu'elle est valable dans l'approximation de grande distance  $r_{12} \gg 1$ . Il s'avère en fait qu'elle donne également un résultat exact à l'intérieur de l'échantillon, ce que nous admettrons par la suite. Le potentiel vecteur s'obtient par intégration :

$$\mathbf{A}(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{M}(1) \wedge \nabla_1 \left( \frac{1}{r_{12}} \right) d\tau.$$

Or

$$\mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{M}}{r} \right) = \nabla \wedge \left( \frac{1}{r} \mathbf{M} \right) = \frac{1}{r} \mathbf{rot} \mathbf{M} + \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \wedge \mathbf{M}.$$

$$\mathbf{A}(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{rot} \mathbf{M}(1)}{r_{12}} d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{rot} \left( \frac{\mathbf{M}}{r_{12}} \right) d\tau.$$

De plus  $\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{a} \, d\tau = - \oint_S \mathbf{a} \wedge d\mathbf{S}$ .

$$\mathbf{A}(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{rot} \mathbf{M}(1)}{r_{12}} \, d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M} \wedge \mathbf{n}}{r_{12}} \, dS. \quad (5.32)$$

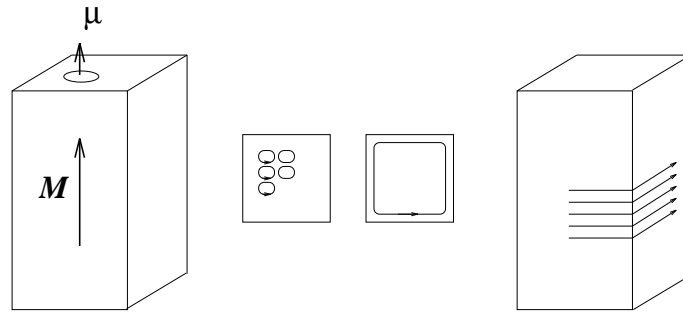
Ce résultat est équivalent au potentiel vecteur créé par une distribution de courants ampériens, respectivement en volume et en surface et dont les densités sont liées à l'aimantation locale :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^* &= \mathbf{rot} \mathbf{M} \\ \mathbf{j}_S^* &= \mathbf{M} \wedge \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Les courants ampériens sont introduits ici comme intermédiaires de calcul. C'est une équivalence formelle et ces courants ne correspondent à aucun mécanisme de conduction électrique.

### Interprétation :

i) Barreau uniformément aimanté :



Si le barreau est très long, on a un solénoïde parfait et  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_S^* = \mu_0 \mathbf{M}$  à l'intérieur.

ii) Aimantation non uniforme : il apparaît en plus des courants superficiels une densité volumique de courants ampériens. L'équivalence entre le système magnétique et la distribution de courants est parfaite, que ce soit à l'intérieur ou à l'extérieur de la matière. En notant  $\mathbf{B}_a$  ou  $\mathbf{B}^*$  le champ magnétique créé par ces courants ampériens, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B}^* &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}^* &= \mu_0 \mathbf{j}^* \end{aligned} \quad (5.34)$$

## 3.2. Masses magnétiques

On a vu que l'on pouvait aussi représenter les dipôles par des masses magnétiques équivalentes. On aura donc cette fois une analogie avec l'électrostatique et on fera appel au potentiel scalaire magnétique  $\phi_m$ . L'élément de volume  $d\tau$ , de moment magnétique  $d\mu(1) = \mathbf{M}(1) \, d\tau$ , crée au point (2) un potentiel

$$d\phi_m(2) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M}(1) \, d\tau \nabla_2 \left( \frac{1}{r_{12}} \right).$$

Or, pour sommer les diverses contributions sur le volume aimanté, on fait varier le point source (1) :

$$\begin{aligned} d\phi_m(2) &= + \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M}(1) \, d\tau \nabla_1 \left( \frac{1}{r_{12}} \right), \\ \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{M}}{r} \right) &= \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{M} \nabla \left( \frac{1}{r} \right), \\ d\phi_m(2) &= + \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \operatorname{div}_1 \left( \frac{\mathbf{M}(1)}{r_{12}} \right) - \frac{1}{r_{12}} \operatorname{div}_1 \mathbf{M}(1) \right] \, d\tau \end{aligned}$$

que l'on intègre sur le volume  $\Omega$  aimanté :

$$\phi_m(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{-\operatorname{div} \mathbf{M}(1)}{r_{12}} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{M}(1) \cdot d\mathbf{S}}{r_{12}}. \quad (5.35)$$

On peut donc définir des distributions volumique et surfacique de charges magnétiques

$$\begin{aligned} \rho_m &= -\operatorname{div} \mathbf{M} \\ \sigma_m &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.36)$$

qui, une fois de plus, constituent un intermédiaire formel pour le calcul. On en déduit

$$\phi_m(2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \int_{\Omega} \frac{\rho_m(1) d\tau}{r_{12}} + \int_S \frac{\sigma_m(1) dS}{r_{12}} \right).$$

Le champ magnétique qui découle de ce potentiel scalaire est noté  $\mathbf{B}_m$  :

$$\mathbf{B}_m(2) = -\nabla \phi_m(2). \quad (5.37)$$

Dans cette formulation, le champ "des masses magnétiques"  $\mathbf{B}_m$  obéit à l'équation

$$\operatorname{div} \mathbf{B}_m = \mu_0 \rho_m. \quad (5.38)$$

Cette description n'est donc correcte au point de vue physique qu'à l'extérieur de la matière où  $\rho_m = 0$  de sorte que  $\operatorname{div} \mathbf{B}_m = 0$ , condition toujours réalisée par le véritable champ magnétique. A l'intérieur de la matière, la présence des masses magnétiques crée un champ  $\mathbf{B}_m$  à divergence non nulle qui, par conséquent, diffère du champ magnétique véritable dans la matière.

### 3.3. Calcul du champ $\mathbf{B}$ créé par la matière aimantée

#### 3.3.1. Absence de champ appliqué

En l'absence de champ appliqué, le champ ampérien et le champ créé par les masses magnétiques satisfont à l'extérieur du milieu aux mêmes relations :  $\operatorname{div} \mathbf{B}^* = \operatorname{div} \mathbf{B}_m = 0$  et  $\operatorname{rot} \mathbf{B}^* = \operatorname{rot} \mathbf{B}_m = \mathbf{0}$ . On a donc  $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B}_{\text{ext}}^* = \mathbf{B}_{m,\text{ext}}$ . A l'intérieur du milieu en revanche, si  $\mathbf{B}^*$  est à divergence nulle, on a  $\operatorname{div} \mathbf{B}_m = \mu_0 \rho_m = -\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{M}$ , soit  $\operatorname{div} \mathbf{B}^* = \operatorname{div}(\mathbf{B}_m + \mu_0 \mathbf{M}) = 0$ . De même,  $\operatorname{rot} \mathbf{B}^* = \mu_0 \mathbf{j}^* = \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{M}$  et  $\operatorname{rot} \mathbf{B}_m = \mathbf{0}$  permettent d'écrire  $\operatorname{rot} \mathbf{B}^* = \operatorname{rot}(\mathbf{B}_m + \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{M}$ . Ces différentes propriétés sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

**Tableau 5.5** Comparatif entre masses magnétiques et courants ampériens.

Courants ampériens $\mathbf{B}^*$	Masses magnétiques $\mathbf{B}_m$
Extérieur	
$\operatorname{div} \mathbf{B}^* = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{B}_m = \mu_0 \rho_m = 0$
$\operatorname{rot} \mathbf{B}^* = \mu_0 \mathbf{j}^* = \mathbf{0}$	$\operatorname{rot} \mathbf{B}_m = \mathbf{0}$
$\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B}_{\text{ext}}^*$	$\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B}_{m,\text{ext}}$
Intérieur	
$\operatorname{div} \mathbf{B}^* = 0$	$\operatorname{div} \mathbf{B}_m = \mu_0 \rho_m = -\mu_0 \operatorname{div} \mathbf{M}$
$\operatorname{rot} \mathbf{B}^* = \mu_0 \mathbf{j}^* = \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{M}$	$\operatorname{rot} \mathbf{B}_m = \mathbf{0}$
	$\operatorname{div}(\mathbf{B}_m + \mu_0 \mathbf{M}) = 0$
	$\operatorname{rot}(\mathbf{B}_m + \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{M}$
$\mathbf{B}_{\text{int}} = \mathbf{B}_{\text{int}}^*$	$\mathbf{B}_{\text{int}} = \mathbf{B}_m + \mu_0 \mathbf{M}$



Ces dernières relations sont finalement générales, car  $\mathbf{M}$  est nul à l'extérieur.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}^* \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_m + \mu_0 \mathbf{M} \end{aligned} \quad (5.39)$$

où  $\mathbf{B}$  est le champ "vrai", macroscopique, créé par la matière aimantée,  $\mathbf{B}^*$  le champ créé par les courants ampériens équivalents et  $\mathbf{B}_m$  le champ créé par les masses magnétiques.

A ces deux approches très générales s'ajoute une troisième approche utile pour les cas où l'aimantation est uniforme. Elle fait intervenir un champ électrique auxiliaire, encore une fois comme un simple intermédiaire de calcul dont l'introduction permet de calculer le potentiel vecteur grâce au théorème de Gauss dans les problèmes à symétrie élevée.

**Bilan :**

i) Courants ampériens :

$$\mathbf{j}_S^* = \mathbf{M} \wedge \mathbf{n}, \quad \mathbf{j}^* = \text{rot}_{\mathbf{r}'} \mathbf{M}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}^* d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{j}_S^* dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right]$$

où  $\mathbf{r}' \in \Omega$  (volume aimanté),  $\mathbf{r}'' \in \Sigma$  (surface de l'échantillon). Le champ magnétique ampérien en découle :

$$\mathbf{B}^* = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}.$$

ii) Masses magnétiques :

$$\sigma_m = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}, \quad \rho_m = -\text{div } \mathbf{M}$$

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \int_{\Omega} \frac{\rho_m d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{\Sigma} \frac{\sigma_m dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right]$$

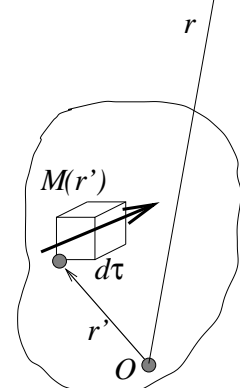
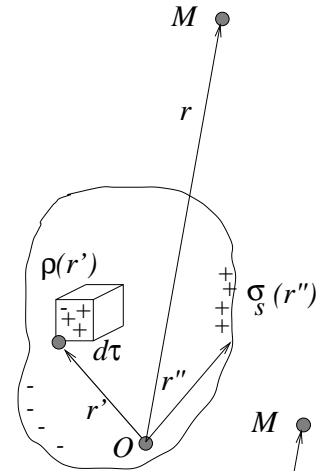
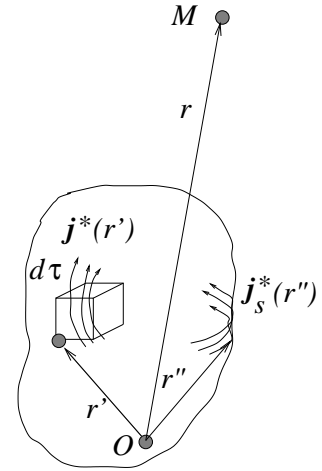
$$\mathbf{B}_m = -\nabla \phi_m(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_m + \mu_0 \mathbf{M}$$

iii) Approche directe champ électrique auxiliaire :

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{1}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{1}) \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$



Si l'aimantation est uniforme, on a

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \wedge \int_{\Omega} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau.$$

Or  $\mathbf{E}_1$  créé en  $M$  par une distribution de charges unité s'écrit

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau$$

d'où

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0\epsilon_0 \mathbf{M} \wedge \mathbf{E}_1 \quad \text{puis} \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (5.40)$$

### 3.3.2. Sous champ appliqué

En présence d'un champ appliqué  $\mathbf{B}_c$  dû à des courants de conduction, le champ total est donné par la somme

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_c + \mathbf{B}^* = (\mathbf{B}_c + \mathbf{B}_m) + \mu_0 \mathbf{M}.$$

On introduit le champ d'excitation magnétique

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B}_c + \mathbf{B}_m \quad (5.41)$$

de sorte que

$$\text{rot } \mu_0 \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{B}_c = \mu_0 \mathbf{j}_c$$

ce qui permet d'écrire le théorème d'Ampère sous la forme

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j}_c \\ \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \sum_{\in \mathcal{C}} I_{\text{vrai}} \end{aligned} \quad (5.42)$$

où  $\mathbf{j}_c$  se réfère exclusivement aux courants "vrais" de conduction. Le champ magnétique total s'écrit également

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mathbf{B}_c + \mathbf{B}^*. \quad (5.43)$$

L'excitation magnétique  $\mathbf{H}$  se mesure comme l'aimantation en  $\text{A.m}^{-1}$ . La divergence de  $\mathbf{H}$  est reliée à la densité de charges magnétiques :



$$\text{div } \mu_0 \mathbf{H} = \text{div } \mathbf{B}_m = \mu_0 \rho_m$$

$$\text{div } \mathbf{H} = \rho_m. \quad (5.44)$$

#### Remarque :

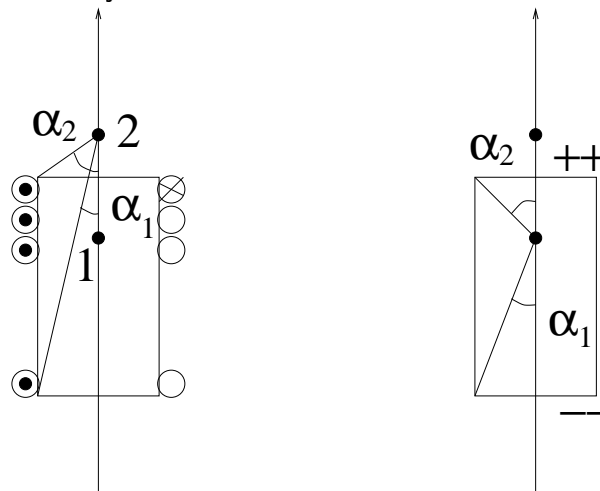
Relations de passage : les relations de passage entre deux milieux aux propriétés magnétiques différentes s'expriment en fonction des densités surfaciques de courants ampériens, de courants de conduction ou de masses magnétiques.

**Tableau 5.6** Comparatif entre champ et excitation magnétique.

Champ magnétique	Excitation magnétique
<b>B</b>	<b>H</b>
$\text{div } \mathbf{B} = 0$ $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j}_c + \mathbf{j}^*)$	$\text{div } \mathbf{H} = \rho_m$ $\text{rot } \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{j}_c$
2	2
$j_s^c + j_s^*$ 	$j_s^c$ $\sigma_m$ 
1	1
$B_n(2) = B_n(1)$ $B_t(2) = B_t(1) + \mu_0(j_s^c + j_s^*)$	$H_n(2) = H_n(1) + \sigma_m$ $H_t(2) = H_t(1) + j_s^c$

**Exemple :**

Barreau aimanté : on considère un barreau cylindrique de longueur finie uniformément aimanté suivant son axe de symétrie.



En 2 (point extérieur), les champs  $\mathbf{B}^*$  et  $\mathbf{B}_m$  sont identiques :

$$\mathbf{B}^* = \frac{\mu_0 \mathbf{M}}{2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \quad \mathbf{B}_m = \frac{\mu_0 \mathbf{M}}{2} (1 - \cos \alpha_1 - (1 - \cos \alpha_2))$$

En 1 (point intérieur) en revanche on a

$$\mathbf{B}^* = \frac{\mu_0 \mathbf{M}}{2} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1) \quad \mathbf{B}_m = \frac{\mu_0 \mathbf{M}}{2} [-(1 - \cos \alpha_1) - (1 - \cos \alpha_2)]$$

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{B}^* - \mu_0 \mathbf{M}.$$

### 3.4. Milieu magnétique linéaire, homogène et isotrope

Dans l'hypothèse des milieux magnétiques linéaires, homogènes et isotropes, l'aimantation est proportionnelle à l'excitation magnétique

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (5.45)$$

où  $\chi_m$  est la susceptibilité magnétique<sup>(107)</sup>. Le champ magnétique est alors donné par deux contributions :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \underbrace{(1 + \chi_m)}_{\mu_r} \mathbf{H}. \quad (5.46)$$

Si  $\mu_r > 1$ ,  $\chi_m > 0$  : le milieu est paramagnétique, si  $\mu_r < 1$ ,  $\chi_m < 0$  : il est diamagnétique.

L'hypothèse des milieux magnétiques linéaires, homogènes et isotropes exclut naturellement les corps ferromagnétiques, antiferromagnétiques, ferrimagnétiques, ... qui ne sont pas linéaires.

### 3.5. Équations de Maxwell dans les milieux

On rassemble les équations pour les champs électrique et magnétique macroscopiques,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , dans les milieux (qui peuvent être diélectriques, aimantés, etc) :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{ex}} - \operatorname{div} \mathbf{P}}{\varepsilon_0}, \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

soit

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_{\text{ex}} \quad (5.47)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (5.48)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}_c + \mu_0 \mathbf{j}^* + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \end{aligned}$$

soit

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.50)$$

Ce sont les quatre équations de Maxwell, sous forme compacte, et valables en toutes circonstances.

<sup>(107)</sup>Cela peut éventuellement être un tenseur.

## 4. Energie magnétique des milieux magnétiques

### 4.1. Travail élémentaire d'aimantation

On considère un matériau infini d'aimantation  $\mathbf{M}$  uniforme. Les effets de champ démagnétisant dus aux masses magnétiques rejetées à l'infini sont négligés <sup>(108)</sup>. On cherche à évaluer l'énergie nécessaire pour établir un champ dans la matière. Supposons que ce champ soit dû à un solénoïde parfait. En l'absence de matériau, le champ d'excitation vaudrait simplement  $H = H_0 = ni_c$  où  $i_c$  est le courant de conduction circulant dans le circuit. Le champ magnétique associé vaut  $B = B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0 ni_c$ . Le même solénoïde parcouru par  $i_c$  est maintenant supposé rempli du milieu magnétique. Aux effets démagnétisants près, le champ d'excitation magnétique est inchangé :  $H = H_0$ . On en déduit  $B = \mu_0(H + M) = \mu_0(H_0 + M) = B_0 + \mu_0 M$ . Si l'on fait varier  $\mathbf{B}$  de  $d\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + d\mathbf{B},$$

le matériau reçoit une énergie  $\delta W$  fournie par l'expérimentateur :  $\delta W = -\delta W'$ . En effet, le flux à travers une spire du solénoïde varie de  $d\Phi_1 = d(\mathbf{B}\mathbf{S}) = B dS$ , soit pour le circuit complet  $d\Phi = N d\Phi_1 = n\ell B dS$ . Cette variation doit être produite par une f.e.m.  $e = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -nS\ell\frac{\partial B}{\partial t}$ , qui dissipe l'énergie  $\delta W' = P dt = ei_c dt = -i_c d\Phi$ . On en déduit

$$\delta W' = - \underbrace{i_c n S \ell}_{H} dB = -\Omega \mathbf{H} d\mathbf{B},$$

où  $\Omega$  est le volume total. On a donc

$$\delta W = \Omega \mathbf{H} d\mathbf{B} = \underbrace{\mu_0 \Omega \mathbf{H} d\mathbf{H}}_{\delta W_0} + \underbrace{\mu_0 \Omega \mathbf{H} d\mathbf{M}}_{\delta W_m} \quad (5.51)$$

où  $\delta W_0$  est simplement le travail d'établissement du champ dans le vide et  $\delta W_m$  le travail d'aimantation du milieu, qu'on note également  $\delta W_m = \Omega \mathbf{B}_0 d\mathbf{M}$ .

Si les champs sont non uniformes, on généralise à une forme intégrale :

$$W = \int_{\Omega} (\mathbf{H} d\mathbf{B}) d\tau. \quad (5.52)$$

### 4.2. Fonctions thermodynamiques

Considérons une unité de volume d'un matériau magnétique linéaire. On a  $\delta W = \mathbf{H} d\mathbf{B}$ , ce qui permet d'écrire l'énergie interne

$$dU = T dS + \mathbf{H} d\mathbf{B}.$$

On définit parfois une quantité analogue en retirant le travail d'établissement du champ :  $U' = U - \frac{1}{2}\mu_0 H^2$ . Sous forme différentielle il reste

$$dU' = T dS + \mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{M}.$$

<sup>(108)</sup>Ces effets sur un échantillon fini sont d'ordre  $H_m \sim \chi M$  et sont négligeables pour les matériaux diamagnétiques et paramagnétiques.

L'énergie libre se définit par  $F' = U' - TS$ , soit

$$dF' = -S dT + \mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{M}.$$

Pour une transformation isotherme on aura alors

$$\begin{aligned} F'(T, \mathbf{M}) - F'(T, 0) &= \int_0^M \mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{M} \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \chi_m H^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H} \mathbf{M}. \end{aligned}$$

L'entropie se déduit par dérivation :

$$\begin{aligned} S(T, \mathbf{M}) &= - \left( \frac{\partial F'}{\partial T} \right)_M = S(T, 0) - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial}{\partial T} (\mathbf{H} \mathbf{M})_M \\ &= S(T, 0) - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{M^2}{\chi_m} \right)_M \\ &= S(T, 0) - \frac{1}{2} \mu_0 M^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{\chi_m} \right)_M. \end{aligned}$$

L'énergie interne finalement se reconstruit à partir de  $F'$  et  $S$  :

$$U'(T, \mathbf{M}) = F'(T, \mathbf{M}) + TS(T, \mathbf{M}).$$